L3 GC
Durée de l'épreuve : 3 heures
Barème indicatif : 2+7+6+5

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Contrôle de Mathématiques, 8 Avril 2016

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A5, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

Exercice 1 : Courbes et surfaces

Déterminer $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal en $A = (1, 2, -1)$ à la surface d'équation $x^2 + 2xz + y^2 + 3z^3 = 0$.
Déterminer une équation du plan tangent en $A = (1, 2, -1)$ à la surface d'équation $x^2 + 2xz + y^2 + 3z^3 = 0$.

Exercice 2 : Intégration

1. On appelle courbe de Lissajou Γ, la courbe paramétrée par $\varphi(t) = (2 \sin t \cos t, \sin t)$ pour t compris entre 0 et π. Étudier les variations de $2 \sin t \cos t$ et $\sin t$ sur $[0; \pi]$. Déterminer des vecteurs tangents à Γ en $(0, 0)$, $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et $(0, 1)$. Représenter Γ, on note L le domaine entouré par la courbe de Lissajou Γ.
   Soit D un domaine du plan on appelle moment quadratique par rapport à l'axe des x la grandeur $I = \iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,et moment quadratique par rapport à l'origine la grandeur $J = \iint_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Calculer I_1 le moment quadratique par rapport à l'axe des x du carré
   $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.
3. Calculer J_1 le moment quadratique par rapport à l'origine de $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2 \text{ et } y \geq 0\}$.
4. Calculer I_3 le moment quadratique par rapport à l'axe des x du triangle T de sommet $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.
5. Calculer I_4 le moment quadratique par rapport à l'axe des x de L. On pourra utiliser la formule de Green Riemann, ainsi que l'égalité $\int_0^\pi \sin^3 t \, \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{4}{15}$.

Exercice 3 : EDP

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(\mathrm{E}_1) : y'(t) + 2ty(t) = t$
2. $(\mathrm{E}_2) : 2y''(t) + 7y'(t) - 4y(t) = 18te^{2t}$
3. $(\mathrm{E}_3) : y'(t) + y(t)^2 - y(t) = 2$

Exercice 4 : Dérivées partielles

On dit qu'un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$ a la propriété (P) si :

$$\forall x, y, t \in \mathbb{R}, \; \Phi(x + t, y + 2t) = e^t \Phi(x, y)$$

1. Montrer que $\Psi(x, y) = e^{\frac{1}{3}(x+y)}$ a la propriété (P).
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \Phi(x, y)$$
3. Montrer que toute solution de l'EDP (E) a la propriété (P).
4. Soit Φ un champ qui a la propriété (P), montrer en explicitant bien bien vos calculs que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \; \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) + 2\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = \Phi(x, y)$$
5. Déterminer l'ensemble des champs scalaires ayant la propriété (P).
6. Déterminer un champ scalaire ayant la propriété (P) qui vérifie $\forall a \in \mathbb{R}, \chi(a, -a) = a^2$