

Examen de Mathématiques S6

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.

Barème indicatif : 5+5+5+5

Exercice 1 : Opérateur différentiel

Soit A le champ vectoriel défini par

$$A(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{i} + \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{j}$$

1. Déterminer la divergence de A , en effectuant les calculs en coordonnées cartésiennes.
2. Retrouver le résultat en utilisant les coordonnées polaires, on rappelle la formule de la divergence en coordonnées polaire : $Div(U_r \vec{u}_r + U_\theta \vec{u}_\theta) = \frac{1}{r} U_r + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}$

Exercice 2 : Circulation d'un champ de vecteurs et intégrale double

Soient les trois points $O = (0, 0)$, $A = (1, 1)$ et $B = (1, 2)$, Δ le triangle OAB et $\partial\Delta^+$ le bord de Δ parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer l'intégrale double et l'intégrale curviligne (circulation d'un champ vectoriel) suivants :

1. Représenter Δ .
2. Calculer $I = \iint_{\Delta} x^2 + y^2 \, dx dy$.
3. Calculer $J = \oint_{\partial\Delta^+} \ln x \, dx dy$.

Exercice 3 : Équations différentielles

Résoudre les deux équations différentielles suivantes :

$$(E_1) : yy'(x) - x^3 = 0$$

$$(E_2) : y^{(3)}(x) - 3y''(x) + 7y'(x) - 5y(x) = e^{-x}$$

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles

Résoudre les deux équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(E_1) : 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 5 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3f(x, y) \quad \text{avec la condition} \quad f(x, 2x) = 0$$

$$(E_2) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{f(x, y)}{x(x+2)}$$