L3SPI
11 Avril 2014
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques : contrôle semestre 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 3+4+4+5+4

Exercice 1 : Champ scalaire

Soit Ψ un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$, $\Psi : (x, y) \to \Psi(x, y)$ On définit un nouveau champ scalaire $\Gamma(r, \theta) = \Psi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ Déterminer $\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}(r, \theta)$ et $\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\theta^2}(r, \theta)$ en fonction des dérivées partielles de f, en déduire que

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial\theta^2}(2, \frac{\pi}{2}) = 4\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(0, 2) - 2\frac{\partial\Psi}{\partial y}(0, 2)$$

Exercice 2 : Courbes et surfaces

Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces d'équation respective $x^3 + yz + xy - 3 = 0$ et $xyz + x^2 + y^2 - 5 = 0$ et A le point $(1; 2; 0)$.

1. Montrer que A appartient à $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.
2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n_2}$ orthogonal à Π_2 le plan tangent à Σ_2 en A, une équation de Π_2. Puis une équation du plan tangent à Σ_1 en A
3. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ à la tangente à la courbe $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en A.

Exercice 3 : Circulation d'un champ de vecteurs et intégrale double

Soient $\rho > 0$ un réel positif, Γ le chemin fermé formé du segment orienté $[OA]$, puis du quart de cercle de centre O et de rayon ρ allant de A à B puis du segment orienté $[BO]$, avec $A = (\rho, 0)$ et $B = (0, \rho)$.

1. Représenter le chemin Γ.
2. Rappeler la formule de Green Riemann en expliquant bien chacun des termes.
3. Calculer la circulation I du champ de vecteur défini par $A(x, y) = \left(-y^2; x^2\right)$ le long de Γ. ($I = \int_\Gamma -y^2 \, dx + x^2 \, dy$)

Exercice 4 : Équations différentielles

1. Soient y_1 une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficient quelconque suivante $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_1$ et y_2 une solution de l'équation différentielle linéaire à coefficient quelconque suivante $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_2$, montrer que $y_1 + 3y_2$ est solution de l'équation différentielle $\sum_{n=0}^{N} a_n y^{(n)} = f_1 + 3f_2$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y''' - y = e^x + 3x$.

Exercice 5 : Équations aux dérivées partielles

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$(E_1) : \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (f(x, y))^2 \quad \text{avec} \quad f(x, 2x) = 1$$
$$(E_2) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + f(x, y) = 0$$