# Examen de Mathématiques – L3SPI – semestre 2 (2014)

## Exercice 1 : $\Pi(r,\theta) = \Psi(r\cos\theta ; r\sin\theta)$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(r\cos\theta ; r\sin\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial \Psi}{\partial y}(r\cos\theta ; r\sin\theta)\, r\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}()\, r^2\sin^2\theta + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}()(-r^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}()(-r\cos\theta)$$
$$+ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}()(-r^2\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}()\, r^2\cos^2\theta - \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, r\sin\theta$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \theta^2}\left(2;\frac{\pi}{2}\right) = 4\,\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(0;2) - 2\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}(0;2).$$

## Exercice 2 : $-\ \Psi_1(x,y,z) = x^3 + yz + xy - 3 \qquad \Psi_2(x,y,z) = xyz + x^2 + y^2 - 5$

$\Psi_1(1,2,0) = 1 + 0 + 2 - 3 = 0$ donc $A \in \Sigma_1$. $\Psi_2(1,2,0) = 0 + 1 + 4 - 5 = 0$. ($A \in \Sigma_2$

2.2. $\vec{n_2} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Psi_2(1;2;0)$ or $\text{grad}\,\Psi_2 = \begin{pmatrix} yz+2x \\ xz+2y \\ xy \end{pmatrix}$ donc $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\underbrace{\text{Equation de } \Pi_2}_{\text{equation du plan} \perp \text{à } \vec{n_2} \text{ et passant par } A.}$ : $2(x-1) + 4(y-2) + 2(z-0) = 0$.

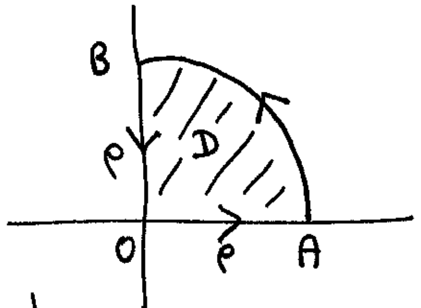
2.3. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \begin{cases} x^3 + yz + xy - 3 = 0 \\ xyz + x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$

tangente à $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en $(1,2,0)$ : $\begin{cases} (3+2)(x-1) + 1.(y-2) + 2(z-0) = 0 \\ 2(x-1) + 4(y-2) + 2(z-0) = 0. \end{cases}$

Il suffit donc de trouver un vecteur non nul qui vérifie le système $\begin{cases} 5x + y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + 2z = 0 \\ 3x - 3y = 0. \end{cases}$ par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Autre méthode $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

## Exercice 3 :




3.3. $\int_\Gamma -y^2\,dx + x^2\,dy$.

$\overset{GR}{=} \iint_D 2x + 2y\ dx\,dy$ (Chg de var polaire)

$= 2\int_0^\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta + r\sin\theta\ \ r\,d\theta\,dr$

$= \frac{2}{3}\rho^3 \int_0^{\pi/2} \cos\theta + \sin\theta\ d\theta = \frac{2}{3}\rho^3\left[+\sin\theta - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}\rho^3$

## Exercice 4 :

4.1 : $\sum a_n y_1^{(n)} = f_1$ et $\sum a_n y_2^{(n)} = f_2$

donc $\sum a_n y_1^{(n)} + 3\sum a_n y_2^{(n)} = f_1 + 3f_2$

donc $\sum a_n (y_1 + 3y_2)^{(n)} = f_1 + 3f_2$

4.2 : (E) est une E.D.L d'ordre 3 à coef constant.

$P(X) = X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1) \qquad \Delta = 1 - 4 = (\sqrt{3}\,i)^2 \qquad X = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

$= (X-1)\left(X + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(X + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

Solution de (E') $y(x) = K_1 e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(K_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + K_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

$(E_1)$ on résoud $y''' - y = e^x$ comme $e^x$ est solution de (E') on cherche une solution de la forme $y(x) = Kxe^x$

$y' = K(1+x)e^x \qquad y'' = K(2+x)e^x \qquad y''' = K(3+x)e^x$

$y$ est solution ssi $y''' - y = 3Ke^x = e^x$ donc $K = \frac{1}{3}$.

$(E_2)$ on résoud $y''' - y = 3x$ on cherche 1 sol sous la forme

$y = ax + b \qquad y''' = 0$ donc $-(ax+b) = 3x$ donc $y(x) = -3x$

Finalement les solutions de (E) sont $y(x) = -3x + \left(\frac{1}{3}x + K_1\right)e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(K_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + K_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

## Exercice 5 :

5.1 Chgt de var $\begin{cases} X = x + ay \\ Y = y \end{cases}$ $\qquad F(X,Y) = f(x,y) = F(x+ay, y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial X} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X}a + \frac{\partial F}{\partial Y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial X} - 2a\frac{\partial F}{\partial X} - 2\frac{\partial F}{\partial Y}$ Posons $a = \frac{1}{2}$.

$-2\frac{\partial F}{\partial Y} = F^2 \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{F^2} = -\frac{1}{2}$ on intègre en $Y$ à $X$ fixé $\frac{-1}{F} = -\frac{1}{2}Y + K(X)$

Donc $f(x,y) = \frac{1}{-K(x+\frac{1}{2}y) + \frac{1}{2}y}$ or $f(x,2x) = 1 = \frac{1}{x - K(2x)}$ Donc $K(2x) = x - 1$ Donc $K(x) = \frac{x}{2} - 1$

Donc $f(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{2}y - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + 1} = \frac{4}{y - 2x + 4}$

5.2 Cela revient juste à résoudre $y'' - 2y' + y = 0 \qquad P(X) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$

on intègre en $x$, à $y$ fixé.

$f(x,y) = \left(K_1(y) + K_2(y)\,x\right)e^x$.