L3SPI
22 Avril 2013
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques : contrôle semestre 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 4+4+4+3+5

Exercice 1 : Courbes et surfaces

Soient Σ_1 et Σ_2 deux surfaces d'équation respective $x^2+y^2-5z^2=0$ et $x^3+y^3+z^3=8$ et A le point $(1;2;-1)$.

1. Montrer que A appartient à $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.
2. Déterminer une équation du plan tangent Π_1 à Σ_1 en A, et une équation du plan tangent Π_2 à Σ_2 en A.
3. Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ à la tangente à la courbe $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en A.

Exercice 2 : Circulation d'un champ de vecteurs et intégrale double

Soient Γ le chemin constitué du demi cercle de centre 0 et de rayon 1 allant du point $A=(1,0)$ au point $B=(-1,0)$, dans le sens trigonométrique, suivi du segment $[B,A]$, et $C=(2;3)$.

1. Représenter le triangle $\mathcal{T}=(ABC)$, puis déterminer l'intégrale double $I=\iint_{\mathcal{T}} y \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Représenter Γ, puis déterminer la circulation du champ de vecteur défini par $A(x,y)=\left(y^2;x^2\right)$ le long de Γ.

Exercice 3 : Équations différentielles

Résoudre les trois équations différentielles suivantes :

(E_1) : $2y'(x)-3y(x)+xe^{2x}=0$

(E_2) : $y^{(4)}(x)-y'''(x)-y'(x)+y(x)=e^{-x}$

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(E) : 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+5\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xyf(x,y)$$

Exercice 5 : Équations aux dérivées partielles

1. Soient A,B,C,D,E,F,g des fonctions de deux variables x et y, (E) et (E') les équations aux dérivées partielles suivantes :
$$(E) : A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+Ff=g(x,y)$$
$$(E') : A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+Ff=0$$
et f_1 une solution de (E), montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f-f_1$ est une solution de (E').
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$(E) : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+f(x,y)=y$$
3. Parmi les solutions de l'exemple précédent déterminer celles qui vérifient les conditions $\begin{cases} f(0,y)=0 \\ f(x,x)=x \end{cases}$