Examen de Maths 2013 Semestre 2.

Exercice 1 : 1 $1+2^2-5=0$ et $1^3+2^3+(-1)^3=8$ donc $A\in \Sigma_1\cap\Sigma_2$

1.2. $\nabla F_1 = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$ $\quad \nabla F_1(A)=\begin{pmatrix}2\\4\\10\end{pmatrix}$ $\quad \nabla F_2=\begin{pmatrix}3x^2\\3y^2\\3z^2\end{pmatrix}$ $\quad \nabla F_2(A)=\begin{pmatrix}3\\12\\3\end{pmatrix}$

Equation de Π_1 : $2(x-1)+4(x-2)+10(x+1)=0$.

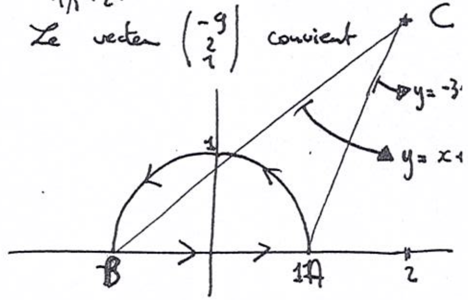
1.3. —— Π_2 : $3(x-1)+12(x-2)+3(x+1)=0$.

1.4. $\nabla F_1(A)$ est orthogonal à Π_1, $\nabla F_2(A)$ est orthogonal à Π_2

$\vec{v}=\nabla F_1(A)\wedge\nabla F_2(A)$ est donc colinéaire à $\Pi_1\cap\Pi_2$.

$\vec{v} = 6\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}-18\\4\\2\end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix}-9\\2\\1\end{pmatrix}$ Le vecteur $\begin{pmatrix}-9\\2\\1\end{pmatrix}$ convient

Exercice 2.



2.1 $I=\int_0^3\left(\int_{y-1}^{\frac{y+3}{3}} y \, dx\right)dy$

$= \int_0^3 y\left(\frac{1}{3}y+1-(y-1)\right)dy.$

$= \int_0^3 -\frac{2}{3}y^2+2y\,dy = \left[-\frac{2}{9}y^3+y^2\right]_0^3 = -6+9=3.$

2.2. Appliquons Green Riemann.

$\mathcal{C} = \int_\Gamma y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_D 2x-2y\,dx\,dy$ puis effectuons un changement de variable en polaire $\mathcal{C}=\iint_{\substack{0\le r\le 1\\0\le\theta\le\pi}}(2r\cos\theta-2r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

$\mathcal{C}=\int_0^1 r^2\,dr\; 2\int_0^\pi \cos\theta-\sin\theta\,d\theta = -\frac{4}{3}$

Exercice 3. (E_1) E.D. linéaire d'ordre 1 à coef constant.

(E_1') : $2y'-3y=0$ dont les solutions sont $y(x)=K e^{3/2 x}$

on cherche une solution particulière sous la forme $y(x)=(ax+b)e^{2x}$

$y'(x)=(2bx+2a+b)e^{2x}$, $2y'-3y=(4b-3b)xe^{2x}+(4a+2b-3a)e^{2x}$ y solution ssi $\begin{cases}b=-1\\a+2b=0\end{cases}$ ssi $\begin{cases}a=+\\b=-\end{cases}$

Les solutions de (E_1) sont les fonctions de la forme

$y(x)=(2-x)e^{2x}+Ke^{3/2x}$

(E_2) est une équation différentielle linéaire d'ordre 4 à coef constant

Soit ESSM est (E_2') $\quad y''''-y'''-y'+y=0$

Son polynôme caractéristique est $P(x)=x^4-x^3-x+1=(x-1)(x^3-1)$

$=(x-1)^2\underline{(x^2+x+1)}$ $\quad \Delta=1-4=-3=(\sqrt{3}i)^2$

$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

Les solutions de (E_2') sont les fonctions $y(x)=(K_1+K_2x)e^{x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(K_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+K_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Cherchons une solution particulière de la forme $y(x)=\quad Ke^{-x}$

$y'(x)=-Ke^{-x}$ $\quad y''(x)=Ke^{-x}$ $\quad y'''(x)=-Ke^{-x}$ $\quad y''''(x)=Ke^{-x}$

y est solution ssi $(+K-(-K)-(-K)+K)e^{-x}=e^{-x}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ donc ssi $K=\frac{1}{4}$.

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $\boxed{y(x)=\frac{1}{4}e^{-x}+(K_1+xK_2)e^{x}+e^{-\frac{1}{2}x}\left(K_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+K_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

Exercice 4 :

$f(x;y)=F(X;Y)=F(x;\,ax+by)$

$\begin{cases}X=x\\Y=ax+by\end{cases}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial X}+a\frac{\partial F}{\partial Y}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=b\frac{\partial F}{\partial Y}$.

$2\frac{\partial f}{\partial x}+5\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial F}{\partial X}+(2a+5b)\frac{\partial F}{\partial Y}$ $\quad$ posons $a=5$ et $b=-2$

$\begin{cases}X=x\\Y=5x-2y\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x=X\\y=-\frac{1}{2}(Y-5X).\end{cases}$

f est solution ssi $2\frac{\partial F}{\partial X}=X\left(-\frac{1}{2}(Y-5X)\right)F$ ssi $\frac{\frac{\partial F}{\partial X}}{F}=+\frac{5}{4}X^2-\frac{1}{4}XY$

on intègre à Y fixé en X : $\ln|F(X;Y)|=\frac{5}{12}X^3-\frac{1}{8}X^2Y+K(Y)$.

Donc $f(x;y)=C(y)\,e^{\frac{5}{12}x^3-\frac{5}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2y}$

$=C(5x-2y)\,e^{-\frac{1}{24}x^3\frac{8}{8}\frac{1}{4}x^2y}$

Exercice 5 :

5.1 : f solution de $(E)\iff A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+C\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial f}{\partial x}+E\frac{\partial f}{\partial y}+Ff=A\frac{\partial f_1}{\partial x}+B\frac{\partial f_1}{\partial y}\ldots+Ff_1$

$\iff A\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}\right)}_{\frac{\partial^2(f-f_1)}{\partial x^2}}+B\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}\right)}_{\frac{\partial^2 (f-f_1)}{\partial y^2}}+C\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x\partial y}\right)}_{\frac{\partial^2(f-f_1)}{\partial x\partial y}}+D\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial}{\partial x}(f-f_1)}+E\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}(f-f_1)}+F(f-f_1)=$

5.2 : $\mathcal{C}$'est juste une équation différentielle en x à y constant on intègre donc l'ESSM puis on trouve une solution particulière

le polynôme caractéristique est r^2+r+1 $\quad r=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ et la solution particulière est $f(x;y)=y$ d'où les solutions sont

$f(x;y)=y+e^{-1/2x}\left(K_1(y)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+K_2(y)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right).$

5.3 : $f(0,y)=y+K_1(y)=0\iff K_1(y)=-y.$

$f(x,x)=x\iff e^{-1/2x}\left(-x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+K_2(x)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=0\iff K_2(x)=\frac{x}{\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$

On a donc $\boxed{f(x;y)=y+e^{-1/2x}\left(-y\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{y}{\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)}$

$=y+ye^{-1/2x}\,\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)}{}$