L3 SPI
Durée de l'épreuve : 2 heures
Barème indicatif : 3+8+4+6

Contrôle de Mathématiques, 14 février 2011

Les documents sont interdits à l'exception d'une feuille A4, manuscrite, au choix de l'étudiant. L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.

Exercice 1 : Cours

Soit Φ un champ scalaire de $\mathbb{R}^3$, énoncer et démontrer la formule donnant le rotationnel du gradient de Φ.

Exercice 2 :

Soient $\Phi(x,y,z) = x^4 + x^2y^2 + y^2 - z^2 + 1$, Σ la surface d'équation $\Phi = 0$, $M_0 = (1,1,2)$, $N_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$, $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{2})$ et $\mathcal{C}$ le cercle paramétré par φ, $\mathcal{C} = \{\varphi(t)/t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que $M_0 \in \Sigma$ puis déterminer une équation du plan tangent à Σ en M_0, noté Π_0.
2. Déterminer une base orthonormale du plan Π_0.
3. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}$.
4. Montrer que $\mathcal{C} \subset \Sigma$.
5. Montrer que $N_0 \in \mathcal{C}$.
6. Déterminer un vecteur tangent $\overrightarrow{u}$ à $\mathcal{C}$ en N_0.
7. $\overrightarrow{u}$ appartient-il au plan tangent à Σ en N_0 ?
8. (*) Existe-t-il une droite passant par le point M_0 qui soit incluse dans Σ ?

Exercice 3 :

On rappelle la formule donnant le gradient en coordonnées polaires : $\text{grad}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}$

1. Déterminer le gradient du champ scalaire donner par $\Phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,\arctan^2\left(\frac{y}{x}\right)$, il est conseillé de donner le résultat en coordonnées polaires.
2. Représenter au point $M_0 = (1,1)$ les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, ainsi que le gradient de Φ en M_0.

Exercice 4 : Dérivées partielles

On dit qu'un champ scalaire de $\mathbb{R}^2$ est translatable si il a la propriété suivante :

$$\forall x, y, t \in \mathbb{R},\ \Phi(x+t, y+t) = t + \Phi(x,y)$$

1. Montrer que $\Psi(x,y) = (x-y)^2 + x$ défini un champ scalaire translatable.
2. Soit Φ un champ scalaire translatable, montrer en explicitant bien bien vos calculs que
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 1$$
3. Soit Φ un champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour tout x, y,
$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 1$$
Pour un couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, on note $F(t) = \Phi(x+t; y+t) - t$, calculer la dérivée de F. Montrer que Φ est un champ scalaire translatable.
4. (*) Déterminer un champ scalaire translatable vérifiant pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\Psi(a, -a) = a^2$