Université de Cergy-Pontoise 2009/2010
Licence L3 de Mathématiques.

Examen de Probabilités
(durée 3 heures)
– Documents et téléphones mobiles sont formellement interdits –

Questions de Cours.– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit (X_n) une suite de v.a. **indépendantes** telles que pour tout n, la v.a. X_n suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \frac{1}{n}]$. On pose $Y_n = nX_n$ et on notera $S_n = Y_1 + Y_2 + \ldots Y_n$.

1) Trouver la loi de Y_n. Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge lorsque n tend vers l'infini, presque sûrement vers une constante m qu'on déterminera : rappeler l'énoncé du théorème utilisé et justifier soigneusement son applicabilité.

2) Montrer que $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la loi : rappeler l'énoncé du théorème utilisé et justifier soigneusement son applicabilité.

Exercice 1.– Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. A chaque lancer, la probabilité d'avoir Pile est $p \in]0, 1[$, et la probabilité d'avoir Face est $q = 1 - p$.
Le joueur A commence, et il s'arrête quand il obtient le prmier Pile. On note X la v.a. égale au nombre de lancers effectués par A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la v.a. égale au nombre de Pile obtenus par le joueur B.

1) Donner la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.
2) Pour tout $n \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$.
3) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
4) Montrer que $P(Y = 0) = \frac{q}{1+q}$.
5) Soit k un entier naturel non nul, montrer que $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^{k-1} q^{2n-k-1}$

Exercice 2.– On considere une suite de v.a. $X_0, X_1, X_2, ..., X_n, ...$ indépendantes et ayant la meme loi de probabilite. A cette suite on fait correspondre la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ definie par :

$$Y_0 = \frac{X_0}{2},\ Y_1 = \frac{X_1 + Y_0}{2},\ Y_2 = \frac{X_2 + Y_1}{2}, ...,\ Y_n = \frac{X_n + Y_{n-1}}{2}, ...$$

1) On notera $\varphi(u)$ la fonction caracteristique des X_i. Exprimer la fonction caracteristique $\varphi_n(u)$ de Y_n en fonction de $\varphi_{n-1}(u)$ puis calculer $\varphi_n(u)$ en fonction de $\varphi(u)$ et de n.
2) On suppose que la loi commune aux v.a. X_i est la loi normale centree $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
   a) Quelle est la loi de Y_n ?
   b) Quelle est la loi limite de Y_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3) On suppose que les v.a. X_i suivent la loi de Cauchy de densite $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (On rappelle que sa fonction caractéristique est donnée par $\varphi(u) = e^{-|u|}$, pour tout $u \in \mathbb{R}$).
Montrer que Y_n converge en loi, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une v.a. dont on identifiera la loi.

Exercice 3.– Soit (X, Y) un couple de v.a.admettant la densité de probabilité

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{(1+y)^2} e^{-xy} & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2) Soit $U = XY$. Déterminer la loi du vecteur (U, Y).
3) Montrer que U et Y sont indépendantes et trouver la loi marginale de U et de Y.
4) Calculer l'espérance de X, puis de Y puis de XY (noter qu'une espérance peut-etre infinie).
5) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4.– Un représentant en automobiles se présente à chacun des cent appartements d'une résidence. Il considère qu'à chaque visite la probabilité de vendre une automoblie est $0,04$ et que la vente dans un appartement est indépendante de la vente dans les autres appartements.
1) Pour le i-ième appartement visité, $i = 1, \ldots, 100$, introduire une v.a. X_i qui permet de modéliser la vente ou non d'un véhicule.
2) Quelle est sa loi ? Quelle est son espérance et sa variance ?
3) Soit S le nombre aléatoire d'automobiles vendues dans cette résidence.
Quelle est sa loi (justifier votre réponse) ? Rappeler son espérance et sa variance ?
4) Par quelle loi peut-on approximer la loi de S ? (justifier votre réponse)
5) En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que :
a) la vente soit nulle.
b)la vente soit supérieure ou égale à 3 automobliles.