Université de Cergy-Pontoise 2008/2009
Licence L3 de Mathématiques.

Examen de Probabilités
(durée 3 heures)
– Aucun document n'est autorisé –
– L'utilisation des calculatrices et téléphones mobiles est interdite –

Questions de Cours.
1) Rappeler les définitions des lois : Bernoulli, Binomiale, Poisson, Hypergéométrique. Rappeler les liens éventuels qui existent entre ces lois.

2) On considère une suite de variables aléatoires X_n avec $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p_n$ et $\mathbb{P}(X_n = n) = p_n$, pour une certaine suite p_n à valeurs dans $[0; 1]$.
a) Montrer que si $lim_{n\to+\infty} p_n = 0$, alors X_n tend vers 0 en probabilité quand n tend vers l'infini.
b) Montrer que si $lim_{n\to+\infty} np_n = 0$, alors X_n tend vers 0 en moyenne quand n tend vers l'infini.

Exercice 1.– Considérons deux variables aléatoires X et Y indépendantes, de densités

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{]0,+\infty[}(x) \text{ et } f_Y(y) = \mu e^{-\mu x} 1_{]0,+\infty[}(x)$$

pour des paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
1) Calculer la fonction de répartition de X, à savoir $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi que celle de Y.
2) En déduire $\mathbb{P}(X > u$ et $Y > u)$, pour tout u.
3) En déduire $\mathbb{P}(U > u)$, où U est la variable aléatoire définie par $U = min(X; Y)$.
4) En déduire la densité de probabilité de U. A quelle loi cela correspond-il ?

Exercice 2.– Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes, de même loi de probabilité $\mathcal{N}(0, 1)$ (Normale centrée réduite), et soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On pose

$$Y_1 = X_1 + aX_2 \quad \text{et} \quad Y_2 = -X_1 + X_2.$$

1) Donner la loi, c'est à dire, la densité, du couple (X_1, X_2).
2) Déterminer la loi du couple (Y_1, Y_2).
3) Calculer les lois marginales du couple (Y_1, Y_2).
4) Calculer l'espérance et la variance de Y_1 et de Y_2.
5) Calculer la covariance du couple (Y_1, Y_2).
6) Pour quelles valeurs de a les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.– Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi :

$$X_n(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

a)

  i) Rappeler la définition de la convergence en probabilité.

  ii) Rappeler la loi faible des grands nombres.

  iii) Montrer que la suite $(\frac{S_n}{n})_n$ converge en probabilité et préciser sa limite.

b) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{xS_n})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

c) Soit la fonction $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln(\mathrm{Ch}(x))$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

  i) Calculer f' et f''.

  ii) Montrer que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En déduire que $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, puis que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}+$.

  iii) En déduire que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{xS_n}) \leq \mathrm{e}^{\frac{n}{2}x^2}$ pour tout $x \geq 0$.

d)

  i) Rappeler l'inégalité de Markov.

  ii) Montrer que $\forall a > 0,\ \forall x > 0,\ \forall n \geq 1$ on a $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ax}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{xS_n})$. (Indication : appliquer l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie).

e) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{P}(S_n \geq a) \leq \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2n}}$.

f)

  i) Calculer la fonction caractéristique de S_n et celle de $-S_n$. En déduire que S_n et $-S_n$ suivent la même loi.

  ii) Montrer que pour tout $a > 0$ on a $\mathbb{P}(S_n \geq a) = \mathbb{P}(S_n \leq -a)$.

  iii) En déduire que $\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2n}}$.

g) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\mathbb{P}(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \epsilon) \leq 2\mathrm{e}^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$.