

---

**Probabilités: Examen**

---

**Durée 3h. Aucun document ni matériel autorisé.**

**Exercice 1.** On jette deux dés indiscernables et équilibrés indépendamment l'un de l'autre et on note le résultat obtenu.

- a) Ecrire l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  de probabilité associé à cette expérience.
- b) Si le plus petit (au sens large) vaut au moins 2, quelle est la probabilité que l'autre soit plus grand que 5

**Exercice 2.** Une machine fabrique des pièces cylindriques dont le diamètre en cm est représenté par une variable aléatoire notée  $X$  ayant une densité

$$f(x) = \begin{cases} 25(x - 0,8) & \text{si } 0,8 \leq x \leq 1, \\ 25(1,2 - x) & \text{si } 1 < x \leq 1,2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de  $f$ .
- b) Déterminer la fonction de répartition  $F(x)$  de  $X$ .
- c) Calculer  $P(0,9 < X < 1,1)$ ,  $P(X < 0,9)$  et  $P(X > 1,1)$ .
- d) Toute pièce fabriquée est vérifiée à l'aide de deux calibres, l'un de 0,9 cm, l'autre de 1,1 cm. La pièce est acceptée si elle passe dans le grand et ne passe pas dans le petit. Sinon, elle est refusée. Donner la probabilité que la pièce soit acceptée, puis qu'elle soit trop petite, puis trop grande.
- e) Le coût de fabrication d'une pièce est de 0,30 euros. Si la pièce est trop petite, elle est définitivement perdue, si elle est trop grande on peut la rectifier et le coût de cette opération est de 0,10 euros supplémentaires. Finalement, une pièce est vendue 0,60 euros.

On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le bénéfice en euros réalisé sur une pièce (le bénéfice est négatif si on perd de l'argent).

Donner la loi de  $Y$  ainsi que son espérance et sa variance.

f) L'entreprise fabrique 10000 pièces. On note  $Y_i$  la variable représentant le gain réalisé sur la  $i$ -ème pièce. On supposera que les différentes pièces sont fabriquées de façon indépendantes.

- i*) Exprimer le gain total  $G$  en fonction des  $Y_i$ . Donner l'espérance et la variance de  $G$ .
- ii*) Par quelle loi peut-on approcher  $G$  (justifier votre réponse)?
- iii*) En déduire approximativement la probabilité que le gain soit supérieur à 2100 euros.

**Exercice 3.** Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) = (\alpha y + xy^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

- a) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit bien une densité de probabilité.
- b) Déterminer la densité de la variable  $X$ , ainsi que celle de  $Y$ .
- c) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- d) Calculer  $E(X)$ ,  $E(Y)$  et  $\text{Cov}(X, Y)$ .
- e) On considère le couple  $(U, Y)$  où  $U = XY$ .
  - i*) Donner et dessiner le domaine  $D$  dans lequel le couple  $(U, Y)$  prend ses valeurs.
  - ii*) Calculer la densité de probabilité de  $(U, Y)$ .
  - iii*) En déduire la densité de probabilité de  $U$ .

