Université de Cergy-Pontoise 2006/2007
Licence L3 de Mathématiques.

Examen de Probabilités
(durée 3 heures)

Questions de Cours.
1) Rappeler les définitions des lois suivantes :
a) Bernoulli, Binomiale, Poisson, Hypergéométrique (**facultatif :** rappeler le lien qui existent entre ces lois).
b)Uniforme sur un intervalle, Gamma, Exponentielle, Normale centrée réduite.
2) a) Rappeler l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev.
b) Montrer que si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et de carré intégrable, alors $Z_n = \frac{1}{n} max\{X_1, \ldots, X_n\}$ tend vers 0 en probabilité.

Exercice 1.– Une variable aléatoire discrète X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsqu'il doit afficher 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n, au hasard (le reste du temps, le compteur affiche la valeur exacte de X). Soit Y le numéro aléatoire affiché.
a) Donner l'ensemble A de valeurs prises par Y, et calculer $P(Y = k)$ pour tout $k \in A$.
b) Montrer que $E(Y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} q^n \right) + E(X)$. En déduire $E(Y)$.
c) L'écran affiche le chiffre 1. Quelle est alors la prpobabilité que la v.a. X ait pris réellement la valeur 1 ?

Exercice 2.– Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité

$$f(x, y) = a(x + y)1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y)$$

1) Déterminer la constante a pour que f soit une densité de probabilité.
2) Déterminer la densité de la v.a. X ainsi que celle de Y.
3) X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $Cov(X, Y)$.
5) Soit maintenant le vecteur aléatoire (X, U) où $U = X + Y$.
a) Donner, puis dessiner le domaine D de $\mathbb{R}^2$ dans lequel le couple aléatoire (X, U) prend ses valeurs ?
b) Calculer la densité de probabilité de (X, U).
c) Notons $g(u)$ une densité de probabilité de U. Calculer la valeur de $g(u)$ pour $u \in [0, 1]$, puis pour $u \in]1, 2]$.

Exercice 3.– A la roulette, il y a 37 numéros : 0,1,2,…,36. Le 0 est vert, les pairs sont rouges, les impairs sont noirs. Si on joue 10 Euros sur le rouge, alors si le rouge tombe on empoche 20 Euros (on a donc gagné 10 Euros), sinon on empoche 0 Euros (on a donc gagné -10 Euros).
Un joueur joue 10 Euros sur le rouge à chaque coup.
1) Construire une variable aléatoire X_i pour modéliser le fait que le rouge tombe au i-ième coup. Quelle est sa loi, son espérance et sa variance.
2) Donner en fonction de X_i le gain aléatoire du joueur au i-ième coup, puis exprimer G_n, le gain accumulé par le joueur sur les n premiers coups en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots X_n$.
3) Calculer $E(G_n)$ et $V(G_n)$.
5) Le joueur joue 1000 fois de suite. Par quelle loi peut-on approcher la loi de son gain accumulé ? (justifier votre réponse).
6) En déduire approximativement la probabilité que ce gain soit strictement positif (aide numérique : $F(0, 85) = 0, 80$, où F est la fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite).