L3 Mathématiques
6 Mai 2015

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 4h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre indicatif : 3+5+3+3+6=20.

Exercice 1. Soit $E = C^0([0,1])$ l'ensemble des fonctions f continues sur $[0,1]$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $(P_n)_n$ la suite de polynômes unitaires orthogonalisés à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, en partant de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Calculer les polynômes P_0, P_1 et P_2.

b) Déterminer le polynôme de meilleure approximation de degré au plus de 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ pour la norme de E issue du produit scalaire considéré.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) &= \sin(t^2 + y(t)), \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

a) Montrer que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)$ est bornée et donner un majorant de sa valeur absolue.

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une solution maximale à l'équation différentielle. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie? Justifier votre réponse.

Etant donné $T > 0$, on considère sur $[0,T]$ le schéma numérique

$$\begin{cases} y^h_{n+1} - y^h_n &= h\sin\left(\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 + y^h_n + \frac{h}{2}\sin(t_n^2 + y^h_n)\right), \qquad n = 0,\dots,N-1, \\ y^h_0 &= 1 + h, \end{cases}$$

où $h = \frac{T}{N}$ et $t_n = nh$, $n = 0,\dots,N-1$.

c) Donner la fonction $\phi(t,y,h)$ définissant le schéma sous la forme $y^h_{n+1} = y^h_n + h\phi(t_n, y^h_n, h)$.

d) Montrer que ce schéma est consistant et stable. On précisera une valeur de la constante de stabilité S (on pourra noter qu'on a toujours $0 \le h \le T$).

e) Montrer que ce schéma est d'ordre au moins 2.

f) Donner une majoration de l'erreur de discrétisation $\sup\limits_{n=0,\dots,N} |y(t_n) - y^h_n|$ en $O(h^p)$ où p est à préciser.

Exercice 3.
a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $(F, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si F est fermé.

Dans la suite on note $E = C^0([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$, et on rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

b) Soit $F = \{f \in E \,|\, f(0) = 0\}$. Montrer que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.
c) Soit G le sous-espace vectoriel de E formé par les fonctions polynômes. Montrer que $(G, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un espace de Banach. Indication: penser au théorème de Weierstrass.

Exercice 4. Montrer que l'équation $x^3+y^3-3xy = 1$ définit implicitement une fonction $y = g(x)$ de classe C^2 au voisinage du point $(0,1)$ et donner le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.

Exercice 5. On note $E = C^0([0,2])$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,2]} |f(x)|$, et on rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On s'intéresse à l'équation

$$y(x)+\int_0^x \left(\frac{s}{4}y(s) + y(s)^2\right) \mathrm{d}s = g(x), \qquad \forall x \in [0,1], \tag{1}$$

où $g \in E$ est donnée et $y \in E$ est l'inconnue. Le but de cet exercice est de montrer que si $\|g\|_\infty$ est assez petite alors l'équation ci-dessus admet au moins une solution dans E. On considère l'application $\Phi : E \to E$ suivante. Etant donné $f \in E$, $\Phi(f) : [0,2] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\Phi(f) : x \mapsto f(x) + \int_0^x \left(\frac{s}{4}f(s) + f(s)^2\right) \mathrm{d}s.$$

a) Justifier rapidement que si $f \in E$ on a bien $\Phi(f) \in E$.
b) Soit $f \in E$. Montrer que Φ est différentiable en f de différentielle l'application $L : h \mapsto L(h)$ où, pour tout $h \in E$, $L(h) : [0,2] \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par

$$L(h) : x \mapsto h(x) + \int_0^x \left(\frac{s}{4}h(s) + 2f(s)h(s)\right) \mathrm{d}s.$$

c) Montrer que Φ est de classe C^1 sur E.
d) Enoncer le théorème d'inversion locale.
e) Expliciter $D\Phi(0)$ et montrer que $|||D\Phi(0) - Id_E||| \leq \frac{1}{2}$, où Id_E désigne l'application identité de E.
f) Donner la valeur de $\Phi(0)$. A l'aide du théorème d'inversion locale, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $g \in E$ vérifiant $\|g\|_\infty < \varepsilon$ l'équation (1) possède une solution $y \in E$.
g) Montrer qu'on a en fait $|||D\Phi(0) - Id_E||| = \dfrac{1}{2}$.