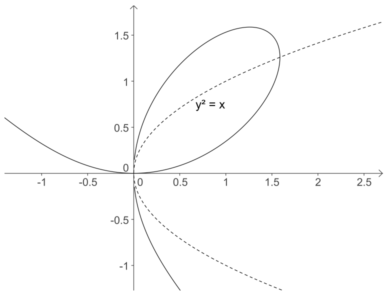
1. Montrer que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé est convexe.
2. Soit E un espace vectoriel normé.
   (a) Soit B une partie non bornée de E. Montrer que B n'est pas un compact.
   (b) Soit F une partie finie non vide de E. Montrer que F est compact. (on pourra utiliser la méthode des recouvrements)
3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On norme cet espace vectoriel par :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$$
   (a) Montrer que la norme 1 définie par :
$$\forall f \in E, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$
   n'est pas équivalente à la norme infinie. (on pourra chercher une suite non bornée de fonctions pour une norme, mais bornée pour l'autre)
   (b) Montrer que E n'est pas de dimension finie.
   (c) Soit $\phi\colon E \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall f \in E, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$
   où g est une fonction continue et positive de E.
   Montrer que ϕ est continue (pour la norme infinie).
   Calculer la norme de ϕ.
4. (Bonus spécial pour les amateurs de compacts qui vont être triplement contents)
   Soit A et B deux compacts d'un espace vectoriel normé.
   Montrer que la réunion des segments, reliant les points de A aux points de B, est compacte.
   Autrement dit, montrer que $C = \cup_{a\in A, b\in B}[a,b]$ est compact.
5. (Bonus prise de tête) A l'exercice 3 on a vu que $\|\phi\|_\infty = \|g\|_1$. A-t-on $\|\phi\|_1 = \|g\|_\infty$?

L3 Calcul différentiel Contrôle continu 2 2008-2009

1. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles, muni d'une norme telle que :
$$\forall (A,B) \in E^2, \quad \|AB\| \le \|A\| \times \|B\|$$
   Montrer que $\phi\colon \left| \begin{array}{l} E \to E \\ A \mapsto A^2 \end{array}\right.$ est différentiable sur E et calculer $D\phi(A).H$ pour tout A et tout H de E.
2. Soit U un ouvert connexe d'un espace de Banach E et $f\colon U \to F$ une application différentiable à valeurs dans un espace de Banach F. Montrer que si l'application $Df\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ est constante, f est somme d'une constante et de la restriction à U d'une application linéaire.
3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme 1 :
$$\forall (x,y) \in E, \quad \|(x,y)\| = |x| + |y|$$
   Soit $U = \{(x,y) \in E \mid 1 < x < y < 4\}$
   (a) Justifier que U est un ouvert et dessiner U.
   (b) Soit $\phi\colon U \to E$ définie par :
$$\forall (x,y) \in U, \quad \phi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \sqrt{xy}\right)$$
   Calculer la différentielle de ϕ en tout $(x,y) \in U$ et montrer que :
$$\|D\phi(x,y)\| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

L3 Calcul différentiel Contrôle continu N^o 3 2008-2009

1. On considère la courbe du plan ($\mathbb{R}^2$) définie par l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.



Montrer qu'en pour tout point (a, b) de la courbe sauf deux que l'on déterminera, il existe un voisinage V de a, un voisinage W de b et une fonction $\phi\colon V \to W$ de classe C^1 telle que :

$$\forall x \in V, \forall y \in W, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0 \iff y = \phi(x)$$

2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On considère $g\colon E \to E$ de classe C^1 telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ majorant la norme de toutes les différentielles : $\forall x \in E, \quad \|Dg(x)\| \leq k$
On définit alors $\phi\colon E \to E$ par : $\forall x \in E, \quad \phi(x) = x + g(x)$
   (a) Montrer que ϕ est un difféomorphisme local en tout point.
   (b) Montrer que pour tout $\mu \in E$ la fonction $g + \mu$ admet un unique point fixe.
   (c) ϕ est-elle un difféomorphisme de E dans E ?
   (d) Application : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\sin(x + y), y - \frac{1}{2}\cos(x - y)\right)$$

   f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

L3 Calcul différentiel — Contrôle continu N^o 4 — 2008-2009

---

1. Soit $f\colon E \to E$ où E est un espace vectoriel normé de dimension finie (sur $\mathbb{R}$).
   (a) f bijective équivaut à f injective .... Vrai | Faux
   (b) f localement bijective implique f injective .... Vrai | Faux
   (c) Si f est localement injective et est surjective alors f est bijective........ Vrai | Faux
   (d) Si pour tout $x \in E$, $f(x) = x$ alors f est différentiable sur E et pour tout $x \in E$, $Df(x) \in \ldots$ $\mathbb{R}$ | E | $L(E)$ | $L(E, L(E))$
2. Soit $\phi\colon F \to F$ une application linéaire où F est un espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie.
   (a) ϕ continue ssi ϕ est bornée........ Vrai | Faux
   (b) ϕ injective si $\|\phi\| > 0$ .... Vrai | Faux
   (c) ϕ bijective ssi ϕ injective .... Vrai | Faux
3. Soit $\phi\colon F \to F$ une application linéaire où F est un espace vectoriel normé de dimension <u>finie</u>.
   (a) $\operatorname{Ker}\phi = \{0\} \iff \phi$ bijective........ Vrai | Faux
   (b) $\operatorname{Det}\phi \neq 0 \iff \phi$ bijective .... Vrai | Faux
4. Théorème du point fixe. Soit $f : U \to E$ où U est un ouvert de E qui est un Banach. On suppose f de classe C^1 sur U et on suppose également qu'il existe $k < 1$ tel que pour tout $x \in U$, $\|Df(x)\| \leq k$. Soit K fermé non vide de U tel que $f(K) \subset K$. Alors :
   (a) K est complet .... Vrai | Faux
   (b) f a un unique point fixe sur K si on rajoute l'hypothèse............ U connexe | U convexe | Aucune hypothèse à rajouter
5. Théorème des accroissements finis. soit $f : U \to F$ où U ouvert de E et E, F espaces de Banach. On suppose f de classe C^1 sur U, et on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in U$, $\|Df(x)\| \leq k$. Soit $(x, y) \in U^2$ alors

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

à condition que........ U connexe | $[x; y] \subset U$ | Aucune autre hypothèse
6. Topologie :
   (a) Un ensemble qui n'est pas ouvert est forcément fermé .... Vrai | Faux
   (b) Il existe des ensembles ouverts et fermés à la fois .... Vrai | Faux

(c) Un ensemble fini est borné . . . . Vrai Faux

(d) Un ensemble borné est fini . . . . Vrai Faux

7. Théorème des fonctions implicites. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to R^n$ avec $q = p - n > 0$ une fonction différentiable.

   (a) La matrice jacobienne de f en $x \in \mathbb{R}^p$ a p lignes et n colonnes . . . . Vrai Faux

   (b) La matrice jacobienne de f peut être inversible . . . . Vrai Faux

   (c) Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = 0$. Si la matrice carrée $n \times n$ la plus à droite de la matrice jacobienne de f en $a = (a_1, a_2)$ est inversible alors il existe V voisinage de a_1 et W voisinage de a_2 et $\phi\colon V \to W$ de classe C^1 tels que :
   $\forall x = (x_1, x_2) \in V \times W, \quad f(x) = 0 \iff x_2 = \phi(x_1)$ . . . . Vrai Faux

8. Théorème de l'inversion locale. Soit $f\colon E \to F$ où E, F espaces de Banach. On suppose f de classe C^1. Si pour tout $x \in E$, $Df(x)$ est inversible alors :

   (a) f est un C^1 difféomorphisme local . . . . Vrai Faux

   (b) f est une application ouverte (l'image d'un ouvert est un ouvert) . . . . Vrai Faux

   (c) f est une application fermée (l'image d'un fermé est un fermé) . . . . Vrai Faux

   (d) f est injective . . . . Vrai Faux

   (e) f est surjective . . . . Vrai Faux

   (f) f est bijective . . . . Vrai Faux