Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S6 Calcul différentiel

Deuxième session

Durée 2h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(4pts)

Soit E un espace vectoriel normé. Soit K un compact de E et $A \notin K$ un point de E. On définit la réunion de tous les segments d'extrémités A et un point de K :

$$\Omega = \{M \in E, \exists B \in K, M \in [A, B]\}$$

On se propose de montrer que Ω est compact.
Soit (M_n) une suite de points de Ω.

1) Montrer qu'il existe une suite de points (B_n) de K telle que pour tout n

$$M_n \in [A, B_n].$$

2) En déduire qu'il existe une suite (θ_n) de $[0, 1]$ telle que pour tout n

$$\overrightarrow{AM_n} = \theta_n \overrightarrow{AB_n}.$$

3) Montrer que (M_n) admet une sous-suite convergente.
4) Conclure.

Problème

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^2$ est munie de la norme euclidienne classique.
On rappelle que l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{R}^2$, noté $l^\infty(\mathbb{R}^2)$, muni de la norme suivante $\|(u_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\|_\infty = \sup\limits_n \|(u_n, v_n)\| = \sup\limits_n \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, est un espace de Banach.

Partie I :(7pts)
Soit $k \in [0, 1[$, un réel fixé.
On définit l'application suivante :

$$F : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - k\sin y \\ y - k\sin x \end{pmatrix}$$

1) Montrer que F est différentiable et calculer en tout point $dF(x, y)$ (on pourra donner une repésentation matricielle).
2) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|dF(x, y)\| \leq 1 + k$.

3) On souhaite montrer que F est bijective. Pour cela on se donne $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on cherche à résoudre

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \qquad (E)$$

a) Montrer qu'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est solution de E si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - F(x_0, y_0) - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

b) On introduit la fonction $G : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F(x,y) - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrer que G est k-lipshitziennne.

c) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution. Conclure.

4) Montrer que F est un difféomorphisme.

5) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\|dF^{-1}(x,y)\| \leq \dfrac{1}{1-k}$ (On pourra commencer par donner une représentation matricielle de $dF^{-1}(x,y)$).

Partie II(9pts)

On cherche à étudier quand elles existent les suites de $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$(n+1)^2 \left[\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \sin(b_{n+1}) \\ \sin(a_{n+1}) \end{pmatrix}$$

0) Vérifier que si une suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est solution alors le terme (a_n, b_n) s'exprime en fonction du terme (a_{n+1}, b_{n+1}).

1) Montrer que si une suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est solution alors il existe une suite de fonctions $G_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telles que pour tout n, $(a_{n+1}, b_{n+1}) = G_n(a_n, b_n)$. (On pourra utiliser la partie I.)

2) En déduire que pour tout (α, β), il existe une unique suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ solution telle que $(a_1, b_1) = (\alpha, \beta)$.

3) Montrer que pour toute suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ solution on vérifie pour chaque entier $n > 0$ fixé

$$\|(a_{n+1}, b_{n+1})\| \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{(n+1)^2}} \|(a_n, b_n)\| \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{(k+1)^2}} \|(a_1, b_1)\|.$$

(On pourra utiliser les résultats de la partie I, appliqués aux fonctions G_n en notant que $G_n(0,0) = (0,0)$).

4) En déduire que toute suite solution est bornée. (On pourra prendre le logarithme du terme produit dans l'inégalité précédente.)

5) On définit alors la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to l^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui à tout couple (α, β) associe la suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de premiers termes $(a_1, b_1) = (\alpha, \beta)$.

a) Montrer que φ est lipshitzienne.

b) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $\varphi(\alpha, \beta) = (a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que pour tout n fixé, (a_n, b_n) peut s'exprimer en fonction de (α, β) (on fera apparaitre les fonction G_k).

c) En déduire que φ est différentiable.