Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S6 Calcul différentiel

Examen final
Première session
Durée 3h00

Les calculatrices et les documents sont interdits

Dans les exercices et le problème, on pourra admettre les résultats d'une question pour faire les questions suivantes.
(Le barême est donné à titre indicatif, il est susceptible de changer).

Exercice 1 :(3pts)

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels normés.
1)(1,5 pts) Montrer que u est un isomorphisme (i.e. que u et u^{-1} sont continues) si et seulement si il existe $\alpha > 0$ et β tels que

$$\forall x \in E, \alpha\|x\|_E \leq \|u(x)\|_F \leq \beta\|x\|_E.$$

2)(1,5 pts) Si u est un isomorphisme, montrer que E est une espace de Banach si et seulement si F est un espace de Banach.

Exercice 2 :(7pts)

1) Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On définit le polynôme suivant :

$$P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3).$$

Montrer qu'il existe un unique triplet $(a_2, a_1, a_0) \in \mathbb{R}^3$ que l'on exprimera en fonction de (x_1, x_2, x_3) tel que

$$P(X) = X^3 - a_2X^2 + a_1X - a_0.$$

On définit alors l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à tout triplet (x_1, x_2, x_3) associe le triplet (a_0, a_1, a_2).

2)(1,5 pts) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et calculer sa différentielle (on pourra donner une représentation matricielle, en explicitant comment calculer $df(x).h$ avec cette matrice).
Soit $U = \{(x_1, x_2, x_3), i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$.

3)(1,5pt) Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $df(x_1, x_2, x_3)$ est un isomorphisme si et seulement si $(x_1, x_2, x_3) \in U$.

4)(3,5 pts) On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la norme $\|.\|$ donnée par le maximum de la valeur absolue des coefficients. Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme ayant trois racines distinctes (on a $\|P\| = \text{Max}\big(|a_3|, |a_2|, |a_1|, |a_0|\big)$).

a) Montrer qu'il existe $\eta_3 > 0$ tel que pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$, si $\|P - Q\| < \eta_3$ alors Q est de degré trois. On note alors $B(P, \eta_3) = \{Q \in \mathbb{R}_3[X], \|P - Q\| < \eta_3\}$.

b) Si pour tout $Q \in \mathbb{R}_3[X]$ on note b_3 le coefficient de degré trois, montrer que $\varphi : Q(X) \mapsto \dfrac{1}{b_3} Q(X)$ définie sur $B(P, \eta_3)$ est continue.

c) En appliquant le théorème d'inversion locale à la fonction f, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $Q \in B(P, \eta_3)$, si $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\| < \eta$ alors $\varphi(Q)$ a trois racines réelles distinctes.

d) En déduire qu'il existe $\eta' > 0$ tel que si $\|P - Q\| < \eta'$, alors Q a trois racines réelles distinctes.

Problème (10 pts)

Dans tout le problème, on note $E = C^0([-1,1], \mathbb{R})$ et $F = C^0([0,1] \times [-1,1], \mathbb{R})$. Ces deux espaces sont munis de la norme uniforme et on rappelle que ce sont alors des espaces de Banach.

Partie I :(4pts)

Soient $g \in F$ et $f_0 \in E$. On s'intéresse aux fonctions de F, $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ dérivables par rapport à leur première variable solutions de

$$(PL_{g,f_0}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{2}\cos(g(t,x)).f(t,x) = 0, & \forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], \\ f(0,x) = f_0(x), & \forall x \in [-1,1] \end{cases}$$

1) Existence et unicité des solutions.

Si on pose pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [-1,1]$, $\gamma(t,x) = \displaystyle\int_0^t \cos(g(s,x))ds$, montrer que $f \in E$ est solution de (PL_{g,f_0}) si et seulement si

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = f_0(x).e^{\frac{1}{2}\gamma(t,x)}.$$

(On pourra étudier pour x fixé la nature de l'équation).

2) Deux résultats techniques

a) Montrer que si $f \in F$ est solution de (PL_{g,f_0}) alors

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))f(s,x)ds.$$

b) Soient h et φ deux fonctions de F telles que

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], h(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))h(s,x)ds + \varphi(t,x).$$

Montrer que $\|h\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty$.

3) Soit $h_0 \in E$. Montrer que si les fonctions $\tilde{f}$ et φ dans F vérifient

$$\tilde{f}(t,x) = h_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))\tilde{f}(s,x)ds + \varphi(t,x),$$

alors f la solution de (PL_{g,h_0}) vérifie $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty$. (On pourra poser $h = f - \tilde{f}$)

Partie II(6pts)

Pour $f_0 \in E$, on s'intéresse aux fonctions de F, $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ dérivables par rapport à leur première variable telles que

$$(P_{f_0}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{2}\sin(f(t,x)) = 0, & \forall (t,x) \in [0,1]\times[-1,1], \\ f(0,x) = f_0(x), & \forall x \in [-1,1] \end{cases}$$

1) Montrer que $f \in F$ est solution si et seulement si

$$\forall (t,x) \in [0,1]\times[-1,1], f(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(f(s,x))ds.$$

2) Existence et unicité.
Soit ψ la fonction de F dans F qui à toute fonction $f \in F$ associe la fonction définie sur $[0,1]\times[-1,1]$ par

$$\psi(f) : (t,x) \mapsto f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(f(s,x))ds.$$

a) Montrer que ψ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.
b) En déduire l'existence et l'unicité des solutions à P_{f_0}.
On définit alors Φ l'application de E dans F qui à toute fonction f_0 associe la solution dans F du problème (P_{f_0}).

3) On se propose de montrer que Φ est lipshitzienne.
Soient f_0 et g_0 deux fonctions de E. Pour simplifier les notations, on pose $\Phi(f_0) = f$ et $\Phi(g_0) = g$.
a) Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,1]\times[-1,1]$,

$$|f(t,x) - g(t,x)| \leq \|f_0 - g_0\|_\infty + \frac{1}{2}\left|\int_0^t \big(\sin(f(s,x)) - \sin(g(s,x))\big)ds\right|.$$

b) En déduire que $\|f - g\|_\infty \leq 2\|f_0 - g_0\|_\infty$. Conclure.

4) Différentiabilité de Φ.
Soient f_0 et h_0 deux fonctions de E.
a) En utilisant la question précédente, montrer que

$$\|\sin(\Phi(f_0+h_0)) - \sin(\Phi(f_0)) - \cos(\Phi(f_0))\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)\|_\infty = o(\|h_0\|_\infty).$$

b) En déduire que pour tout h_0 il existe une fonction $\varphi \in F$ telle que $\|\varphi\|_\infty = o(\|h_0\|_\infty)$ avec $\forall (t,x) \in [0,1]\times[-1,1]$,

$$\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)(t,x) = h_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(\Phi(f_0)).\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)(s,x)ds + \varphi(t,x).$$

c) En appliquant la partie I avec $\tilde{f} = \Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)$ et $g = \Phi(f_0)$, montrer que pour tout $h_0 \in E$ il existe une fonction $T(h_0) \in F$ solution du problème (PL_{g,h_0}) telle que

$$\|\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0) - T(h_0)\|_\infty = o(\|h_0\|_\infty).$$

d) En utilisant la question 1) de la partie I, en déduire que Φ est différentiable en tout point $f_0 \in E$ et expliciter $d\Phi(f_0).h_0$.