Université de Cergy-Pontoise **2008-2009**
S6 Calcul différentiel

Correction de l'examen final
Première session
Durée 3h00

Exercice 1 :(3pts)

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire bijective entre deux espaces vectoriels normés.
1) Les application étant linéaires, on sait que u et u^{-1} son continues si et seulement il existe deux constantes $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ telles que

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \beta \|x\|_E,$$
$$\forall y \in F, \|u^{-1}(y)\|_E \leq \gamma \|y\|_F,$$

Or puisque u est bijective la dernière inégalité peut s'écrire en posant $y = u(x)$,

$$\forall x \in E, \|x\| \leq \gamma \|u(x)\|_F.$$

En posant $\alpha = \dfrac{1}{\gamma}$, on obtient le résultat voulu.
2) On suppose que u est un isomorphisme et que F est un espace de Banach. On souhaite montrer que E est aussi un espace de Banach (i.e que tout suite de Cauchy de E converge dans E).

On se donne donc une suite (x_n) une suite de Cauchy de E (on va montrer qu'elle converge). En utilisant la question 1), on sait qu'il existe une constante β telle que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \beta\|x\|$. On pose alors $(y_n) = (u(x_n))$ qui est une suite de F. On vérifie que pour tout n et m, $\|y_n - y_m\| = \|u(x_n - x_m)\| \leq \beta\|x_n - x_m\|$. Puisque l'on sait que (x_n) est une suite de cauchy, on en déduit que (y_n) est une suite de cauchy de F. On a supposé que F est un Banach, donc (y_n) converge vers une limite y de F. Enfin on sait que u^{-1} est continue, donc $(u^{-1}(y_n)) = (x_n)$ converge vers $u^{-1}(y)$. On vient bien de montrer que tout suite de cauchy de E converge, donc E est un espace de Banach.

Ce n'est pas la peine de faire la réciproque car il suffit d'échanger le rôle de E et F en utilisant $v = u^{-1}$ qui est aussi un isomorphisme.

Exercice 2 :(7pts)

1) Une simple identification des coefficients d'un polynôme nous donne après développement

$$\begin{cases} a_0 = x_1.x_2.x_3, \\ a_1 = x_1.x_2 + x_2.x_3 + x_3.x_1, \\ a_2 = x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

2) Par les théorèmes généraux, f est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ (et même C^∞). Le calcul de sa matrice jacobienne donne

$$J_f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2.x_3 & x_1.x_3 & x_1.x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par définition (la matrice jacobienne $J_f(x_1,x_2,x_3)$ étant la matrice de $df(x_1,x_2,x_3)$ exprimée dans la base canonique), on a donc

$$\begin{aligned} df(x).h &= J_f(x_1,x_2,x_3).\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2.x_3.h_1 + x_1.x_3.h_2 + x_1.x_2.h_3 \\ (x_2+x_3).h_1 + (x_1+x_3).h_2 + (x_1+x_2).h_3 \\ h_1+h_2+h_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit $U = \{(x_1,x_2,x_3), i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j\}$.

3) Le complémentaire de U est la réunion des trois domaine suivantes $P_1 = \{(x_1,x_2,x_3), x_2 = x_3\}$, $P_2 = \{(x_1,x_2,x_3), x_1 = x_3\}$ et $P_3 = \{(x_1,x_2,x_3), x_1 = x_2\}$. On reconnait trois plans de $\mathbb{R}^3$ qui sont trois fermés. Leur réunion (qui est finie) est encore un fermé et U est donc un ouvert.

Soit $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ fixé. L'application $df(x_1,x_2,x_3)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui même et $J_f(x_1,x_2,x_3)$ est sa matrice dans la base canonique. C'est un isomorphisme si et seulement son déterminant $\det(J_f(x_1,x_2,x_3)) \neq 0$. Pour expliciter au mieux les cas d'annulation, on intéret à chercher à factoriser le plus possible.
En soustrayant par exemple les deux premières colonnes par la troisième, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_2.x_3 & x_1.x_3 & x_1.x_2 \\ x_2+x_3 & x_1+x_3 & x_1+x_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2.(x_3-x_1) & x_1.(x_3-x_2) & x_1.x_2 \\ x_3-x_1 & x_3-x_2 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne on obtient (en utilisant la linéarité par rapport à chaque colonne)

$$\det(J_f(x_1,x_2,x_3)) = (x_3-x_1)(x_3-x_2).\begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (x_3-x_1)(x_3-x_2).(x_2-x_1)$$

On en déduit immédiatement le résultat voulu.
4) On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la norme $\|.\|$ donnée par le maximum de la valeur absolue des coefficients. Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme ayant trois racines distinctes (on a $\|P\| = \mathrm{Max}\big(|a_3|, |a_2|, |a_1|, |a_0|\big)$).
a) Soit $Q(X) = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0 \in \mathbb{R}_3[X]$. On a bien sûr que Q est de degré trois si et seulement si $b_3 \neq 0$. Or par définition $\|P - Q\| \geq |a_3 - b_3|$, donc si $\|P - Q\| < \eta_3$ alors $a_3 - \eta_3 < b_3 < a_3 + \eta_3$. On cherche une condition qui nous

assure que $b_3 \neq 0$, on voit qu'il suffit de choisir $\eta_3 = |a_3|$ par exemple (ou encore $\eta_3 = \dfrac{a_3}{2}$).

b) Par définition pour tout $Q(X) = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$, $\varphi(Q) = X^3 + \dfrac{b_2}{b_3}X^2 + \dfrac{b_1}{b_3}X + \dfrac{b_0}{b_3}$. Vue que l'on travaille avec la norme associée aux coefficients, il est claire que l'on peut représenter l'application φ par l'application qui va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ qui au quadruplet (b_3, b_2, b_1, b_0) (où $b_3 \neq 0$ puisque $Q \in B(P, \eta_3)$), associe le quadruplet $\left(1, \dfrac{b_2}{b_3}, \dfrac{b_1}{b_3}, \dfrac{b_0}{b_3}\right)$ qui est clairement continue par les théorèmes généraux.

c) Soit (x_1, x_2, x_3) le triplet de racines de P. On a par hypothèse que $(x_1, x_2, x_3) \in U$. En appliquant le théorème d'inversion locale à la fonction f qui est de classe C^1 au voisinage du point (x_1, x_2, x_3) où $df(x_1, x_2, x_3)$ est un isomorphisme, on en déduit qu'il existe un voisinage V de (x_1, x_2, x_3) et W un voisinage de $f(x_1, x_2, x_3) = (\frac{a_0}{a_3}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$ tel que f réalise une bijection entre V et W (et même un difféomorphisme). On en déduit que si un polynôme unitaire a ses coefficients assez proches de $(\frac{a_0}{a_3}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{a_2}{a_3})$ alors ses racines sont dans U. Ce qui revient à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $Q \in B(P, \eta_3)$, si $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\| < \eta$ alors $\varphi(Q)$ a trois racines réelles distinctes.

d) On a vu que φ était continu. Donc il existe $\eta' > 0$ tel que si $\|P - Q\| < \eta'$ alors $\|\varphi(P) - \varphi(Q)\| < \eta$. Et donc par la question précédente, si $\|P - Q\| < \eta'$, alors Q a trois racines réelles distinctes.

Problème

Dans tout le problème, on note $E = C^0([-1, 1])$ et $F = C^0([0, 1] \times [-1, 1])$. Ces deux espaces sont munis de la norme uniforme et on rappelle que ce sont alors des espaces de Banach.

Partie I :
Soient $g \in F$ et $f_0 \in E$. On s'intéresse aux fonctions de F, $f : (t, x) \mapsto f(t, x)$ dérivables par rapport à leur première variable solutions de

$$(PL_{g,f_0}) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{2}\cos(g(t,x)).f(t,x) = 0, & \forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], \\ f(0,x) = f_0(x), & \forall x \in [-1,1] \end{array} \right.$$

1) Existence et unicité des solutions.
On définit pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1]$,

$$\gamma(t, x) = \int_0^t \cos(g(s, x))ds$$

Pour tout x fixé, on a une équation différentielle linéaire du premier ordre du type $y' = ay$. Or on sait que si A est une primitive qui s'annule en t_0 alors la fonction définie par $y(t) = k_0e^{A(t)}$ est l'unique solution qui vérifie $y(t_0) = k_0$. On en déduit immédiatement le résultat par définition de γ, à savoir :
$f \in E$ est solution de (PL_{g,f_0}) si et seulement si

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1], f(t, x) = f_0(x).e^{\frac{1}{2}\gamma(t,x)}.$$

2)Deux résultats techniques.

a) Soit $f \in F$ une fonction vérifiant

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))f(s,x)ds.$$

Alors pour tout x fixé, en dérivant par rapport à t on a bien

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{2}\cos(g(t,x)).f(t,x) = 0, \forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1].$$

De plus $f(0,x) = f_0(x)$ donc f est solution de (PL_{g,f_0}).
Réciproquement, si f est solution de (PL_{g,f_0}), alors pour tout (t,x),

$$\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))f(s,x)ds = 0$$

Or $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = f(t,x) - f(0,x)$ et comme $f(0,x) = f_0(x)$, f vérifie bien

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))f(s,x)ds.$$

On vient de démontrer l'équivalence demandée.

b)Soient h et φ deux fonctions de F telles que

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], h(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))h(s,x)ds + \varphi(t,x).$$

alors pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
|h(t,x)| &\leq \frac{1}{2}\left|\int_0^t \cos(g(s,x))h(s,x)ds\right| + |\varphi(t,x)| && (\text{ par inégalité triangulaire}),\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t |\cos(g(s,x))h(s,x)|ds + |\varphi(t,x)| && (\text{ par propriété des intégrales}),\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|h\|_\infty ds + |\varphi(t,x)| && (\text{ car } |\cos\theta| \leq 1,\ \forall \theta \in \mathbb{R}),\\
&\leq \frac{1}{2}\|h\|_\infty + |\varphi(t,x)| && (\text{ car } t \in [0,1]),\\
&\leq \frac{1}{2}\|h\|_\infty + \|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout (t,x) on a donc $\|h\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|h\|_\infty + \|\varphi\|_\infty$.
Et donc $\|h\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty$.

3) Soient $\tilde{f}$ et φ deux fonctions de F telles que

$$\tilde{f}(t,x) = h_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))\tilde{f}(s,x)ds + \varphi(t,x).$$

Soit f la solution de (PL_{g,h_0}) alors d'après le 2)a), f vérifie

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = h_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))f(s,x)ds.$$

On en déduit en posant $h = f - \tilde{f}$ que

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], h(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^t \cos(g(s,x))h(s,x)ds - \varphi(t,x).$$

En appliquant alors le résultat du 2)b), h vérifie donc $\|h\|_\infty \leq 2\| - \varphi\|_\infty$, soit le résultat voulu

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty.$$

Partie II

Pour $f_0 \in E$, on s'intéresse aux fonctions de F, $f : (t,x) \mapsto f(t,x)$ dérivables par rapport à leur première variable telles que

$$(P_{f_0}) \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) - \dfrac{1}{2}\sin(f(t,x)) = 0, & \forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], \\ f(0,x) = f_0(x), & \forall x \in [-1,1] \end{array} \right.$$

1) La méthode et les calculs sont exactement les mêmes qu'à la question 2)a) de la partie précédente.
Si on suppose que $f \in F$ vérifie

$$\forall (t,x) \in [0,1] \times [-1,1], f(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(f(s,x))ds,$$

alors en dérivant par rapport à t ou en appliquant cette relation pour $t = 0$, il est immédiat que f est solution de (P_{f_0}).
Réciproquement, si f est solution alors en intégrant par rapport à t, on obtient de même le résultat souhaité.
2) Existence et unicité.
Soit ψ la fonction de F dans F qui à toute fonction $f \in F$ associe la fonction définie sur $[0,1] \times [-1,1]$ par

$$\psi(f) : (t,x) \mapsto f_0(x) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(f(s,x))ds.$$

a) Dans cette question f_0 est fixé et ψ est une fonction de F dans F. On considère f_1 et f_2 deux fonctions de F et on étudie $\psi(f_1) - \psi(f_2)$. Pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [-1,1]$,

$$\begin{aligned} |\psi(f_1)(t,x) - \psi(f_2)(t,x)| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^t \sin(f_1(s,x)) - \sin(f_2(s,x))ds \right|, \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |\sin(f_1(s,x)) - \sin(f_2(s,x))|ds. \end{aligned}$$

Or pour tous réels a et b, $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$ (on peut par exemple retrouver ce résultat très classique, en notant que la dérivée de sin est majorée par 1 en valeur absolue et appliquer le théorème des accroissements finis). On en déduit que

$$\begin{aligned} |\psi(f_1)(t,x) - \psi(f_2)(t,x)| &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |f_1(s,x) - f_2(s,x)|ds, \\ &\leq \frac{1}{2}\|f_1 - f_2\|_\infty (\text{ car } t \in [0,1]). \end{aligned}$$

On en déduit que $\|\psi(f_1)-\psi(f_2)\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}\|f_1-f_2\|_\infty$ et donc ψ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

b) On sait que F est un espace de Banach. On vient de montrer que ψ est contractante. Elle admet donc un unique point fixe. Or on a montré à la question 1) que f est solution si et seulement si f est un point fixe de ψ. On en déduit l'existence et l'unicité des solutions à P_{f_0}.

Remarque : au lieu d'utiliser une méthode de point fixe ce que l'on vient de faire avec les questions a) et b), on aurait pu directement utiliser un théorème de Cauchy-Lipshitz pour les équations du type $y'(t) = \mathcal{F}(t, y)$, avec l'application de $\mathcal{F} : [0, 1] \times E \to E$, où E est bien un espace de Banach, qui à tout couple (t, y) associe $\mathcal{F}(t, y) = -\dfrac{1}{2}\sin(y)$ (attention ici $y : (t, x) \mapsto y(t, x)$ est vue comme une fonction continue dépendant uniquement de t définie de $[0, 1]$ dans E). Il suffisait alors de montrer que $\mathcal{F}$ était k-lipshitzienne sur E (on retrouvait $k = \dfrac{1}{2}$ mais pour utiliser le théorème de Cauchy-Lipshitz, il n'était alors pas important que $k < 1$).

On définit alors Φ l'application de E dans F qui à toute fonction f_0 associe la solution dans F du problème (P_{f_0}).

3) Lipschitzianité de Φ.
Soient f_0 et g_0 deux fonctions de E. Pour simplifier les notations, on pose $\Phi(f_0) = f$ et $\Phi(g_0) = g$.

a) En utilisant la question 1), par définition f est solution de (P_{f_0}) et g est solution de (P_{g_0}) et donc

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1], f(t, x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(f(s, x))ds,$$

$$\forall (t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1], g(t, x) = g_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(g(s, x))ds,$$

On en déduit immédiatement que pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times [-1, 1]$,

$$|f(t, x) - g(t, x)| \leq \|f_0 - g_0\|_\infty + \frac{1}{2}\left|\int_0^t \big(\sin(f(s, x)) - \sin(g(s, x))\big)ds\right|.$$

b) En utilisant de nouveau l'inégalité pour tous réels a et b, $|\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |f(t, x) - g(t, x)| &\leq \|f_0 - g_0\|_\infty + \frac{1}{2}\int_0^t |(f(s, x)) - g(s, x)|ds, \\ &\leq \|f_0 - g_0\|_\infty + \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty(\text{ car } t \in [0, 1]). \end{aligned}$$

On obtient donc que $\|f - g\|_\infty \leq 2\|f_0 - g_0\|$ et donc Φ est 2-lipshitzienne.
3) Différentiabilité de Φ.
Soient f_0 et h_0 deux fonctions de E.

a) On pouvait faire une rédaction qui manque juste un peu de rigueur en écrivant un DL de sinus à l'ordre 1

$$\sin(y) - \big(\sin(x) + \cos(x)(y-x)\big) = o(|x-y|).$$

Pour fair une démonstration totalement rigoureuse, on écrit une inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2

$$\big|\sin(y) - \big(\sin(x) + \cos(x)(y-x)\big)\big| \leq \frac{1}{2}(x-y)^2.$$

On en déduit immédiatement que

$$\|\sin(\Phi(f_0+h_0)) - \sin(\Phi(f_0)) - \cos(\Phi(f_0))\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)\|_\infty$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\|_\infty^2,$$

En utilisant la question précédente, on a $\|\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\|_\infty \leq 2\|h_0\|_\infty$ et donc

$$\|\sin(\Phi(f_0+h_0)) - \sin(\Phi(f_0)) - \cos(\Phi(f_0))\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)\|_\infty \leq 2\|h_0\|_\infty^2,$$

On en déduit le résultat attendu.

b) En utilisant de nouveau la question 1), on sait que

$$\forall (t,x) \in [0,1]\times[-1,1], \Phi(f_0+h_0)(t,x) = f_0(x)+h_0(x)+\frac{1}{2}\int_0^t \sin(\Phi(f_0+h_0)(s,x))ds,$$

et

$$\forall (t,x) \in [0,1]\times[-1,1], \Phi(f_0)(t,x) = f_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(\Phi(f_0)(s,x))ds.$$

En soustrayant ces deux égalités, on a donc

$$\big(\Phi(f_0+h_0)-\Phi(f_0)\big)(t,x) = h_0(x)+\frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin(\Phi(f_0+h_0)(s,x)) - \sin(\Phi(f_0)(s,x))\right) ds$$

Si on pose alors

$$\begin{aligned}\varphi(t,x) &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sin(\Phi(f_0+h_0)(s,x)) - \sin(\Phi(f_0)(s,x))\right) ds \\ &\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \cos(\Phi(f_0)).\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)(s,x)ds,\end{aligned}$$

alors

$$\big(\Phi(f_0+h_0)-\Phi(f_0)\big)(t,x) = h_0(x)+\frac{1}{2}\int_0^t \cos(\Phi(f_0)).\big(\Phi(f_0+h_0)-\Phi(f_0)\big)(s,x)ds+\varphi(t,x).$$

et en utilisant la question précédente, puisque

$$\|\varphi\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\sin(\Phi(f_0+h_0)) - \sin(\Phi(f_0)) - \cos(\Phi(f_0))\big(\Phi(f_0+h_0) - \Phi(f_0)\big)\|_\infty,$$

on a $\|\varphi\|_\infty = 0(\|h_0\|_\infty)$.

c) En posant $\tilde{f} = \Phi(f_0 + h_0) - \Phi(f_0)$ et $g = \Phi(f_0)$, on constate que l'égalité

$$\big(\Phi(f_0+h_0)-\Phi(f_0)\big)(t,x) = h_0(x)+\frac{1}{2}\int_0^t \cos(\Phi(f_0)).\big(\Phi(f_0+h_0)-\Phi(f_0)\big)(s,x)ds+\varphi(t,x),$$

peut s'écrire

$$\tilde{f}(t,x) = h_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^t \cos(g(s,x))\tilde{f}(s,x)ds + \varphi(t,x).$$

En appliquant la dernière question de la partie I on a donc pour tout $h_0 \in E$, la fonction $T(h_0) \in F$ solution du problème (PL_{g,h_0}) vérifie

$$\|\tilde{f} - T(h_0)\|_\infty \leq 2\|\varphi\|_\infty,$$

soit par construction de φ,

$$\|\Phi(f_0 + h_0) - \Phi(f_0) - T(h_0)\|_\infty = o(\|h_0\|)$$

d) En utilisant la question 1)a) de la partie I, on a donc en posant $\gamma(t,x) = \displaystyle\int_0^t \cos(g(s,x))ds$ avec $g = \Phi(f_0)$,

$$T(h_0)(t,x) = h_0(x).e^{\frac{1}{2}\gamma(t,x)}.$$

Pour f_0 fixé, l'application T ainsi définie de E dans F est clairement linéaire (par rapport à h_0). Il est immédiat que $\|T(h_0)\|_\infty \leq \|e^{\frac{1}{2}\gamma}\|_\infty.\|h_0\|_\infty$ et donc T est continue. Le résultat de la question précédente nous donne donc que Φ est différentiable en tout point $f_0 \in E$, $d\Phi(f_0) = T$. Plus précisément on a pour f_0 fixé, $d\Phi(f_0)$ est l'application linéaire de E dans F qui à toute fonction h_0 de E associe $d\Phi(f_0).h_0$, la fonction de F suivante

$$\begin{array}{rccl} d\Phi(f_0).h_0 : & [0,1]\times[-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (t,x) & \longmapsto & h_0(x).\exp\left(\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \cos(\Phi(f_0)(s,x)ds\right) \end{array}$$