Université de Cergy-Pontoise **Licence L3**
Examen de Mathématiques **M. Fang, Hebey, Volte**
Durée 3 heures **Mai 2008**

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Le barême est donné à titre indicatif.

Questions de cours.1: (1) (2 pts) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ un point de Ω, et $f : \Omega \to F$ une application. Quand dit-on que f est différentiable au point a ? Qu'appelle-t-on différentielle de f en a ?

(2) (2 pts) Enoncer le théorème d'inversion locale pour les applications entre espaces de Banach.

Exercice 1: (2 pts) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ un point de Ω, et $f : \Omega \to F$ est une application différentiable au point a. Montrer que f est nécessairement continue au point a.

Exercice 2: (2 pts) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E, $a \in \Omega$ un point de Ω, et $f, g : \Omega \to F$ deux applications telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $\theta > 0$ tels que

$$\|g(x) - f(x)\|_F \leq C\|x - a\|_E^{1+\theta}$$

pour tout $x \in E$. Montrer que f est différentiable au point a si et seulement si g est différentiable au point a. Que vaut $Df(a)$ en fonction de $Dg(a)$?

Problème: (1) (2 pts) Soit $\Phi : I\!R \to I\!R$ la fonction réelle de classe C^∞ définie par $\Phi(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Montrer que $|\Phi''(x)| \leq 1$ pour tout $x \in I\!R$. En déduire, à l'aide du théorème des accroissement finis, que $|\Phi'(y) - \Phi'(x)| \leq |y - x|$ pour tous $x, y \in I\!R$, puis, en appliquant encore une fois le théorème des accroissements finis, que

$$|\Phi(y) - \Phi(x) - (y - x)\Phi'(x)| \leq |y - x|^2$$

pour tous $x, y \in I\!R$. Pour la seconde application du théorème des accroissements finis on pourra fixer $x \in I\!R$ et considérer la fonction réelle de $I\!R$ dans $I\!R$ de variable y donnée par $y \to \Phi(y) - \Phi(x) - (y - x)\Phi'(x)$.

(2) (1 pt) Soit $E = C^0([0, 1], I\!R)$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $I\!R$ dans $I\!R$. On munit E de la norme

$$\|u\|_{C^0} = \max_{x \in [0,1]} |u(x)| \ .$$

On admet pour l'instant que l'espace $(E, \|\cdot\|_{C^0})$ est un espace de Banach. Montrer que l'application linéaire $u \to \int_0^1 u(t)dt$ de E dans $I\!R$ est continue de E dans $I\!R$. Que vaut sa différentielle en un point $u \in E$?

(3) (1 pt) Montrer que l'application bilinéaire $(u, v) \to \int_0^1 u(t)v(t)dt$ de $E \times E$ dans $I\!R$ est continue de $E \times E$ dans $I\!R$. Que vaut sa différentielle en un point $(u, v) \in E \times E$?

(4) (1 pt) Montrer que l'application $u \to \int_0^1 u(t)^2 dt$ de E dans $I\!R$ est différentiable sur E. Que vaut sa différentielle en un point $u \in E$?

(5) (2 pts) Sachant que $(u+h)^3 = u^3 + 3u^2h + 3uh^2 + h^3$, montrer que l'application $u \to \int_0^1 u(t)^3 dt$ de E dans $I\!R$ est différentiable sur E. Que vaut sa différentielle en un point $u \in E$?

(6) (2 pts) Soit $\Phi : I\!R \to I\!R$ l'application de la question (1) ci-dessus. Montrer que l'application $u \to \Phi(u)$ de E dans E est différentiable sur E. Que vaut sa différentielle en un point $u \in E$?

(7) (1 pt) Soit $\Phi : I\!R \to I\!R$ l'application de la question (1) ci-dessus. Montrer que l'application $u \to \int_0^1 \Phi(u)(t) dt$ de E dans $I\!R$ est différentiable sur E. Que vaut sa différentielle en un point $u \in E$?

(8) (2 pts) Montrer que E muni de $\| \cdot \|_{C^0}$ est un espace de Banach.