

# Examen d'analyse numérique 2 mai 2014

**Question SCILAB:** Sur la première page de votre copie, écrivez un code scilab (sans utiliser `intg` ou `integrate`) permettant le calcul approché de chacun des réels suivants

$$I = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 \sin(x^2) dx$$

**Question de cours** Donner la définition de la stabilité, de la consistance, de la convergence d'un schéma et montrer que consistance + stabilité entraînent la convergence.

**Exercice 1:** Calculer la meilleure approximation d'ordre 1 pour la norme uniforme de  $x \mapsto \tan x - x$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ .

**Exercice 2:** Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $[-1, 2]$ .

1) Montrer qu'il existe un et un seul polynôme de degré inférieur ou égal à deux ou nul tel que

$$f(0) = P(0), \quad f'(0) = P'(0), \quad P''(1) = f''(1)$$

2) Calculer les polynômes  $P_0, P_1, Q_1$  tels que

$$P_0(0) = 1, \quad P_0'(0) = P_0''(1) = 0$$

$$P_1(0) = 0, \quad P_1'(0) = 1, \quad P_1''(1) = 0$$

$$Q_1(0) = 0 = Q_1'(0), \quad Q_1''(1) = 1$$

3) Donner l'expression de  $P_f$  en fonction des polynômes  $P_0, P_1, Q_1$  et de  $f(0), f'(0), f''(1)$ .

4) Donner une formule d'erreur entre  $f$  et  $P_f$ .

**Exercice 3:**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \frac{\cos y}{x^2 + y^2 + 1}$$

1) Montrer que  $f$  est continue.

2) Montrer qu'elle est Lipschitzienne de rapport  $\leq 2$  par rapport à  $y$ .

3) On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe une solution au voisinage de 0. Existe-t'il une solution définie sur  $\mathbb{R}$  ?

4) On considère sur  $[0, a] \times [0, h_0]$  le schéma pour  $h = \frac{a}{N+1}$

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}^h - y_n^h}{h} = \frac{\cos y_n^h}{(nh)^2 + (y_n^h)^2 + 1 + h}, & n \in [0, N] \\ y(0) = h^2 \end{cases}$$

Montrer que ce schéma est stable et consistant. Que peut-on en déduire?

Donner une majoration de l'erreur. Le schéma est-il d'ordre 2?