Troisième année de licence M
2012/2013

Examen d' analyse numérique du 26 avril

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits.

Question de cours (5 points non compensable)

Énoncer et démontrer le théorème de Weierstrass.

Exercice 1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[0,1]$. On note $M_3 = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(3)}(x)|$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 qui satisfait

$$P(0) = f(0),\ P'(0) = f'(0),\ P'(1) = f'(1)$$

2. Déterminer les 3 polynômes P_o, Q_o et Q_1 de degré inférieur à 2 vérifiant :

$$\begin{cases} P_o(0) = 1,\ P_o'(0) = 0,\ P_o'(1) = 0 \\ Q_o(0) = 0,\ Q_o'(0) = 1,\ Q_o'(1) = 0 \\ Q_1(0) = 0,\ Q_1'(0) = 0,\ Q_1'(1) = 1 \end{cases}$$

   Exprimer P_f en fonction de ces polynômes.

3. Soit $h \in]0,1[$ fixé. On définit R, Π et F sur $[0,1]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t)\ ,\ \Pi(t) = t^2(2t-3) \text{ et } F(t) = R(t)\Pi(h) - R(h)\Pi(t)$$

   (a) Montrer que F s'annule en deux points.
   (b) Calculer $F'(0)$ et $F'(1)$.
   (c) En déduire qu'il existe $\xi \in]0;1[$ tel que $F^{(3)}(\xi) = 0$.
   (d) Déterminer $F^{(3)}(t)$ puis montrer que $\forall t \in [0;1],\ |f(t) - P_f(t)| \leq \frac{1}{12}M_3 t^2|2t-3|$.

Exercice 2 Soit f la fonction exponentielle définie sur $[0;1]$, $\forall x \in [0;1],\ f(x) = e^x$.

1. Calculer P_u le polynôme de meilleure approximation uniforme d'ordre 1 de la fonction f sur $[0;1]$.
2. On rappelle que la norme sur $L_2([0,1])$ est définie par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}$, déterminer le polynôme P_2 de degré inférieur à 1 qui vérifie $\forall Q \in \mathbb{R}_1[X],\ \|P_2 - f\|_2 \leq \|Q - f\|_2$

Exercice 3

On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+y^2}$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et donner un majorant M de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ sur $[-a,a]\times\mathbb{R}$.
2. En déduire une constante de Lipschitz de f par rapport à la seconde variable indépendante de x. Qu'en déduire pour l'existence de solutions locales pour $\begin{cases} y' = f(x,y) & x \in [-a,a] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   On considère le schéma explicite à un pas suivant, pour $h = \frac{1}{N}$

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1}^h - y_n^h}{h} = \Phi(nh, y_n^h, h) = \frac{1}{2}f(nh, y_n^h) + \frac{1}{2}f(nh+h, y_n^h + hf(nh, y_n^h)) & \forall n \in [0,\ldots,N-1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer la fonction Φ.
4. Montrer que le schéma est consistant, stable et convergent.