Examen d'analyse numérique avril 2012

Exercice 1:
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,2]$.

1. Montrer qu'il existe un et un seul polynome P_f de degré inférieur ou égal à 2 ou nul, tel que
   $f(0)=P_f(0)$, $f(1)=P_f(1)$, $f'(0)=P_f'(0)$.
2. Calculer les polynomes P_o, Q_o et P_1 tels que
   $P_o(0)=1$, $P_o'(0)=P_o(1)=0$.
   $Q_o(0)=Q_o(1)=0$, $Q_o'(0)=1$.
   $P_1(1)=1$, $P_1(0)=P_1'(0)=0$.
3. Montrer les relations
$$\left\{\begin{array}{l} 1=P_o+P_1 \\ 0=-xP_o(x)+(1-x)P_1(x)+Q_o(x) \\ 0=x^2P_o(x)+(1-x)^2P_1(x)-2xQ_o(x) \end{array}\right.$$
4. On suppose de plus f de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1,2]$. Montrer la formule d'erreur
$$P_f(x)=f(x)+P_o(x)\int_x^0 \frac{f^{(3)}(t)(0-t)^2}{2!}dt+P_1(x)\int_x^1 \frac{f^{(3)}(t)(1-t)^2}{2!}dt+Q_o(x)\int_x^0(-t)f^{(3)}(t)dt.$$

Exercice 2:

1. Montrer que $\forall x\in[-1,1]$, $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.
2. Trouver la meilleure approximation uniforme d'ordre 1 sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ de la fonction $x\mapsto \sin x$.

Exercice 3:

1. Rappeler la dérivée de $\arctan x$.
2. On considère l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{l} y'=\arctan(xy+y^2) \\ y(0)=1 \end{array}\right.$
   Montrer que la fonction $f:\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \arctan(xy+y^2) \end{array}\right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer la dérivée partielle de f par rapport à y.
4. Soit a un réel strictement positif. Pour $|x|\le a$ et $|y|\ge a+1$, montrer que $|xy+y^2|\ge a+1$.
5. En distinguant les cas $|y|<a+1$ et $|y|\ge a+1$, montrer que $|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)|\le 2+3a$ pour tout $y\in\mathbb{R}$ et $x\in[-a;a]$.
6. En déduire que $f(x,y)$ est Lipschitzienne par rapport à y, uniformément en $x\in[-a,a]$, on déterminera une constante de Lipschitz. Que peut-on en déduire pour l'équation différentielle?
7. On considère le schéma , sur $[0,a]$, $h=\frac{a}{N}$, $n=0,1,2,...,N-1$
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{y_{n+1}^h-y_n^h}{h}=f(nh+\frac{h}{2},y_n^h+\frac{h}{2}f(nh,y_n^h)+h^2) \\ y_o^h=1+h^2 \end{array}\right.$$
   Donner une fonction $\phi(x,y,h)$ définie sur $[0,a]\times\mathbb{R}\times[0,h_o]$ telle que le schéma s'écrive
   $\frac{y_{n+1}^h-y_n^h}{h}=\phi(nh,y_n^h,h), y_o^h=1+h^2$.
8. Montrer que ce schéma est stable et consistant avec l'équation différentielle
9. Le schéma est-il d'ordre 2 ?
10. En déduire un ordre de l'erreur e_n en fonction de h.