Licence L3
Analyse Numérique
Avril 2011, 3 heures

Université de Cergy-Pontoise
Examen Mathématiques
Le barême est indicatif.

Toute utilisation d'appareil numérique (tlph portable, calculette, etc.) est formellement interdite !

---

1. (6 pts) On considère la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[1, 2]$.
   (a) Montrer que f est concave.
   (b) Déterminer la meilleure approximation P d'ordre 1 pour la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
   (c) Que vaut la distance $\|f - P\|_\infty$?
   (d) Faire une esquisse illustrative des graphes de f et de P qui fait apparaître la distance $\|f - P\|_\infty$.

2. (6 pts) On considère la fonction $f(x) = 1 - x^4$ sur l'intervalle $I = [-1, 1]$. On définit le produit scalaire habituelle $\langle f_1, f_2\rangle = \int_{-1}^{1} f_1(t)f_2(t)\, dt$ ainsi que la norme quadratique : $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.
   (a) Déterminer un polynôme d'interpolation $L \in \mathbb{R}_2[X]$ de Lagrange d'ordre 2 de f aux points $-1, 0, 1$. Que peut-on dire sur l'unicité de L ?
   (b) Déterminer $c \in \mathbb{R}$ pour que les trois polynômes $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2 - c$, soient orthogonaux entre eux. Déterminer aussi $\langle P_0, P_0\rangle$, $\langle P_1, P_1\rangle$ et $\langle P_2, P_2\rangle$.
   (c) Montrer qu'il y a un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ qui minimise $\|f - P\|_2$. On exprime P sous la forme $P(X) = c_0P_0(X) + c_1P_1(X) + c_2P_2(X)$ et détermine les constantes, c_0, c_1 et c_2.
   (d) Montrer sans effectuer de calculs que les deux polynômes L et P vérifient :
   $$\|f - L\|^2 = \|f - P\|^2 + \|P - L\|^2.$$

3. (8 pts) Soit $K > 0$. On considère l'équation différentielle suivante
   $$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = -Ky + \cos(y) \quad , \quad t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
   On admettra que la solution est définie pour toute $t \geq 0$. On va étudier deux schemas pour approcher la solution de $(*)$ sur l'intervalle du temps $t \in [0, T]$. On utilise N pas de taille $h = T/N > 0$.
   (a) Décrire un schema (A) pour la méthode d'Euler explicite pour $(*)$.
   (b) Décrire une boucle en language **scilab** qui implemente ce schema A (3 lignes suffisent).
   Schema (B) [Euler semi-explicite] : $z_0 = 0$ et $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{h} + Kz_{n+1} = \cos(z_n)$, $n \geq 0$.
   (c) Donner la fonction $\Phi(y, h)$ pour que le schema (B) soit sous la forme : $z_{n+1} = z_n + h\Phi(z_n, h)$.
   (d) Montrer que $|z_n| \leq \frac{1}{K}$ pour tout $0 \leq n \leq N$.
   (e) Montrer que le schema B est consistant avec l'équation différentielle et qu'il est stable.
   (f) Conclure que la solution $y(t)$ de $(*)$ vérifie $|y(T)| \leq 1/K$ pour tout $T > 0$.