

Examen d'analyse numérique Mai 2010

Exercice 1 :

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $[-2, 1]$. Montrer qu'il existe un et un seul polynôme P_f de degré inférieur ou égal à trois ou nul tel que

$$f(0) = P_f(0), f'(0) = P_f'(0), f'(-1) = P_f'(-1), f''(0) = P_f''(0)$$

Calculer les polynômes P_0, P_1, P_2, Q de degré inférieur ou égal à trois tels que

$$1 = P_0(0), P_0'(0) = P_0''(0) = P_0'(-1) = 0$$

$$1 = P_1'(0), P_1'(-1) = P_1''(0) = P_1(0) = 0$$

$$1 = P_2''(0), P_2'(-1) = P_2'(0) = P_2(0) = 0$$

$$1 = Q'(-1), Q(0) = Q'(0) = Q''(0) = 0$$

Calculer P_f en fonction de $f(0), f'(0), f''(0), f'(-1)$ et P_0, P_1, P_2 , et Q .

Montrer les relations valables pour tout x :

$$0 = -xP_0(x) + P_1(x) + Q(x)$$

$$0 = x^2P_0(x) - 2xP_1(x) + 2P_2(x) - 2(1+x)Q(x)$$

$$0 = -x^3P_0(x) + 3x^2P_1(x) - 6xP_2(x) + 3(1+x)^2Q(x).$$

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^3 et telle que $f^{(4)}$ existe et est intégrable sur $[-1, 2]$. Montrer que

$$P_f(x) = f(x) + \int_0^x \left(\frac{t^3 P_0(x)}{3!} - \frac{t^2 P_1(x)}{2} + t P_2(x) \right) f^{(4)}(t) dt - \int_{-1}^x \frac{(1+t)^2 f^{(4)}(t)}{2} Q(x) dt$$

Exercice 2 :

Calculer la meilleure approximation uniforme d'ordre 1 de la fonction polynomiale

$$f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y}{\log(2+y^2+x^2)} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{y}{\log(2+y^2+x^2)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et que sa dérivée par rapport à y est bornée sur \mathbb{R}^2 , donnez en un majorant.

En déduire l'existence et l'unicité d'une solution maximale.

On considère le schéma sur $[0, a]$, $h = \frac{a}{N}$, $t_n = nh$,

$$\begin{cases} y_{n+1}^N - y_n^N = h \frac{y_n^N + h}{\log(2+(y_n^N)^2+t_n^2+h^2)} \\ y_0^N = h + 1 \end{cases}$$

Définir une fonction ϕ de trois variables donnant le schéma sous la forme $y_{n+1}^N = y_n^N + h\phi(t_n, y_n^N, h)$. Montrer que ce schéma est stable et consistant. Est-t-il d'ordre 2 ? Donner une estimation de l'erreur en fonction de h .