NOM :
Prénom :
95; 71

Licence Parcours M
troisième année
2008/2009

Contrôle continu n°**1 (2 Février 2009)**, Analyse numérique

Les trois premiers exercices se traitent sans documents, ni machine, pour les 3 derniers les documents et l'utilisation d'internet sont autorisés. Le travail est individuel du début à la fin, vous pouvez utiliser des bouts de codes ou des corrections de TP se trouvant sur la page d'Alexandre MIZRAHI. L'énoncé doit être rendu avec les copies.

Exercice 1 : Énoncer la formule de Taylor-Lagrange.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \sin(\pi x)$. Calculer P_3, le troisième polynôme de Bernstein si on appelle premier polynôme de Bernstein P_1, défini par $P_1(x) = f(0)x + f(1)(1-x)$.

Exercice 3 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

1. Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.
2. On pose pour $x \in [0,1]$, $P_n(x) = f(0) + \int_0^x Q_n(t)\,dt$.
   (a) Montrer que P_n est un polynôme. Donner son degré en fonction de celui de Q_n.
   (b) Montrer que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$. (Indication : on pourra montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |f(x) - P_n(x)| \le \|f' - Q_n\|_\infty$)
3. En déduire l'existence d'une suite de polynômes qui converge uniformément vers f et telle que la suite des polynômes dérivés converge uniformément vers f'.

Exercice 4 :
1. Écrire un code scilab permettant d'obtenir la matrice ligne $[71\ \ 72\ldots\ \ 171]$.
2. Écrire un code scilab permettant d'obtenir la matrice colonne ayant les mêmes éléments.
3. On suppose que dans un programme scilab est définie une fonction nommée `fonc` qui à <u>un entier</u> n, renvoie une valeur $f(n)$, à l'aide d'une boucle for, écrire un code scilab permettant d'obtenir la matrice ligne :

$$L = [f(171)\ \ f(172)\ldots\ \ f(271)]$$

Exercice 5 :
1. Écrire P_{10} le dixième polynôme de Bernstein de la fonction racine carrée.
2. Calculer la norme infinie de la fonction $P_{10} - \sqrt{\cdot}$

Exercice 6 : Soit la fonction $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Calculer la valeur exacte de $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
2. On note I_n la valeur approchée de I à l'aide de la méthode des rectangles qui utilise n rectangles et qui prend la valeur de f au milieu de l'intervalle : par exemple la formule pour deux rectangles sur l'intervalle $[0,1]$, donne $I_2 = \frac{1}{2}f(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}f(\frac{3}{4})$.
   (a) Pour la fonction f de l'exercice, faire un dessin représentant I_3 comme une aire.
   (b) Écrire la formule avec n rectangles sur $[0,1]$.
   (c) Calculer à l'aide de scilab I_{95}, on se limitera à donner la valeur trouvée avec les 5 premières décimales exactes.
   (d) Pour n variant entre 50 et 150 de 10 en 10, représenter $\ln|I_n - I|$ en fonction de $\ln n$. Conjecturer une valeur α telle que $|I - I_n| = O(\frac{1}{N^\alpha})$, on donnera le code scilab utilisé, puis on détaillera la méthode.