Examen d'analyse numérique

Exercice 1 : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1,1]$. Montrer qu'il existe un et un seul polynome de degré inférieur ou égal à 3 ou nul tel que

$$f^{(i)}(0) = P^{(i)}(0)$$

pour $i = 0,1,2,3$.

On note P_f ce polynome.

Calculer les polynomes P_0, P_1, P_2 et P_3 de degré inférieur ou égal à 3 tels que

$$P_0(0) = 1,\ P_0'(0) = P_0''(0) = P_0^{(3)}(0) = 0$$

$$P_1'(0) = 1,\ P_1(0) = P_1''(0) = P_1^{(3)}(0) = 0$$

$$P_2''(0) = 1,\ P_2(0) = P_2'(0) = P_2^{(3)}(0) = 0$$

$$P_3^{(3)}(0) = 1,\ P_3(0) = P_3''(0) = P_3''(0) = 0$$

Calculer P_f en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ $f"(0)$, $f^{(3)}(0)$, P_0, P_1, P_2 et P_3.

On suppose que $f^{(4)}$ existe et est intégrable sur $[0,1]$. Exprimer $f(x) - P_f(x)$ à l'aide d'une intégrale. Quelle est la formule utilisée?

Exercice 2 :

Donner la meilleure approximation uniforme d'ordre 1 de la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Exercice 3 :

On rappelle que $\text{ch}x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

Calculer $\int_0^1 \text{sh}x\ dx$, $\int_0^1 x\text{sh}x\ dx$ et $\int_0^1 x^2\text{sh}x\ dx$

Déterminer la meilleure approximation d'ordre 2 de la fonction sh$x$ sur $[0,1]$ pour la norme L^2. On pourra utiliser le fait que $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

Exercice 4 :

Soit $f(x,y) = \frac{1}{1+\sin^2(x^2+y)}$. Montrer que f est Lipshitzienne par rapport à la deuxième variable. Donner un coefficient de Lipshitz sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$.

En déduire l'existence et l'unicité d'une solution locale à l'équation. On admettra que la solution est définie sur $[0,1]$.

$$\begin{cases} y'(x) & = & \frac{1}{1+\sin^2(x^2+y)} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

Soit $h = \frac{1}{N}$, $n = 0, 1, \ldots, N$

On considère l'approximation par différences finies pour approcher la solution sur $[0,1]$.

$$\begin{cases} \frac{y^h_{n+1} - y^h_n}{h} = \frac{1+h}{1+\sin^2((n^2h^2)+y^h_n+h)} & , n \in [1, N] \\ y^h_0 = h^2 \end{cases}$$

Donner la fonction $\phi(x,y,h)$ pour écrire le schéma sous la forme:

$$\begin{cases} y^h_{n+1} = & y^h_n + h\phi(x^h_n, y^h_n, h) \\ y^h_0 = h^2 \end{cases}$$

Montrer que cette approximation est consistante avec l'équation différentielle.

Montrer qu'elle est stable. On calculera une constante de Lipschitz de ϕ par rapport à la variable y. (On pourra étudier $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,h)$).

En déduire que l'erreur est en $O(h)$. Le schéma est il d'ordre 2?