Examen d'analyse numerique

13 Mai 2008

Question de Cours

Enoncer le théorème de Cauchy-Peano.

Exercice 1 :

On considère l'équation pour $t \in]-1,1[$

$$y'(t) = t(y(t) + y(t)^{\frac{1}{3}})$$

$$y(0) = 0$$

Donner une solution évidente.

Montrer que la fonction $x \mapsto (x + x^{\frac{1}{3}})$ n'est pas lipshitzienne au voisinage de 0. On pourra utiliser la suite $x_n = \frac{1}{n}$ et raisonner par l'absurde.

Montrer que l'intégrale $\int_0^Y \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}+y}$ est convergente en 0. En utilisant le changement de variable $y = u^3$ calculer $\int_0^Y \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}+y}$.

En déduire une deuxième, éventuellemet une troisième solution et une quatrième pour l'équation différentielle.

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = (1 + x^2 + y^4)^{\frac{1}{4}}$$

$$y(0) = 0$$

Montrer l'existence et l'unicité d'une solution locale. Montrer que la fonction $f(x, y) = (1 + x^2 + y^4)^{\frac{1}{4}}$ est Lipschitzienne de rapport ≤ 1.

On considère le schéma

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \phi(t_n, y_n, h)$$

avec $\phi(t, y, h) = \frac{1}{2}(1 + t^2 + y^4)^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}(1 + (t + h)^2 + (y + h(1 + t^2 + y^4)^{\frac{1}{4}})^4)^{\frac{1}{4}}$

Montrer que ce schéma est stable et consistant. Calculer une constante de Lipschitz de ϕ par rapport à la deuxième variable.

Montrer que le schéma est d'ordre 2.

En déduire une puissance de p pour laquelle l'erreur est $O(h^p)$.

Exercice 3 :

Donner la meilleure approximation d'ordre 1 pour la norme de la convergence uniforme de la fonction $f(t) = 1 + t^{\frac{1}{2}}$ sur $[0, 1]$