Examen final analyse numérique

Exercice 1 : Déterminer la meilleure approximation d'ordre 1 pour la norme de la convergence uniforme, de la fonction

$$f(x) = x + x^{1/2}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 2 : Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([0, 4])$ il existe un et un seul polynome de degré inférieur ou égal à 4 ou nul tel que

$$P_f(1) = f(1),\ P_f(2) = f(2),\ P_f(3) = f(3)$$

$$P_f'(1) = f'(1), P_f'(2) = f(2)$$

On définit P_i pour $i = 1, 2, 3$ et Q_j pour $j = 1, 2$ comme les polynomes de degré inférieur ouégal à 5 tels que pour $i = 1, 2, 3$

$$P_i(j) = \delta_i^j,\ j \in \{1, 2, 3\}\ P_i'(1) = P_i'(2) = 0$$

$$Q_j(i) = 0,\ i \in \{1, 2, 3\}, Q_j'(k) = \delta_j^k,\ k = 1, 2, j = 1, 2$$

où on rappelle la définition du symbole de Kronecker

$$\delta_i^j = 1, \text{si } i = j,\ = 0 \text{ sinon}$$

Exprimer le polynome P_f en fonction des P_i et Q_j et de $f(1), f(2), f(3)$, et $f'(1)$ et $f'(2)$.

Exercice 3 :

On considère l'équation différentielle (1)

$$y'(t) = \frac{y(t)t}{1 + y(t)^2 + t^2}$$

sur $]0,1[$

$$y(0)=1$$

Montrer que la foncton $f(t,y)=\frac{yt}{1+y^2+t^2}$ satisfait $|\partial_y f|(t,y)\leq \frac{1}{2}$. En déduire qu'elle est Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, uniformément par rapport à $t\in[0,1]$.

On considère l'approximation par différences finies :

$N\in\mathbb{N}$, $h=\frac{1}{N+1}$, $n\in\{1,2,\cdots N\}$,

$$y_{n+1}^h-y_n^h=h\frac{nhy_n^h}{1+(y_n^h)^2+(nh)^2}+h^2/2\left(\frac{(1+(y_n^h)^2)^2y_n^h+(nh)^2(1-(y_n^h)^2)y_n^h}{(1+(y_n^h)^2+(nh)^2)^3}\right)$$

$$y_0^h=1+h^2$$

Déterminer ϕ telle que le schéma puisse s'crire $y_{n+1}^h=y_n^h+h\phi(t_n,y_n^h,h)$, où $t_n=nh$. Montrer que le schéma est consistant et stable (on pourra étudier$\frac{\partial\phi}{\partial y}(t,y,h)$.

Montrer que le schéma est d'ordre 2. En déduire en utilisant le cours une majoration de l'erreur

$$e_n^h=y(nh)-y_n^h$$

de la forme

$$e_n=O(h^\alpha)$$

avec un α à préciser le meilleur possible.