Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S6 - année universitaire 2013-2014

Examen - Analyse Complexe - Session 2 (23 juin 2014)

Durée : 2h00 - Ni documents ni calculatrices/smartphones/tablettes ne sont autorisés.

Question de cours
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ qui admet en $z_0 \in \mathbb{C}$ un pôle simple. Montrer que le résidu de f en z_0 est donné par la formule : $\mathrm{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$.

Exercice I
Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(z) = a(x)\cos(y) + ib(x)\sin(y)$.

1. Soient $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$. Donner l'expression des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}$ à l'aide des dérivées des fonctions a et b.
2. Supposons dorénavant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $\left\{\begin{array}{l} a'(x) = b(x) \\ b'(x) = a(x) \end{array}\right. \quad (*)$
   (a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que a vérifie une équation différentielle d'ordre 2 qu'on résoudra.
   (c) En déduire que f est alors de la forme $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = Ae^z + Be^{-z}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   (Indication : résoudre le système $(*)$)

Exercice II
Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1}$? On note $F(z)$ la somme de cette série entière.
2. Étudier la convergence de la série dans les points $z = \pm 1$.
   Question bonus : Étudier le comportement de la série sur tout le cercle de convergence.
3. Montrer que F vérifie : $\forall z \in D, \;\; F'(z) = \dfrac{1}{1-z}$ et $F(0) = 0$.
4. Pour $z \in D$, on pose $\phi(z) = (1 - z)e^{F(z)}$.
   (a) Calculer $\phi'(z)$ pour $z \in D$.
   (b) En déduire que pour tout $z \in D$, $e^{F(z)} = \dfrac{1}{1-z}$.

Exercice III
Pour $\alpha > 0$, on définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + \alpha^2}$.

1. Trouver les zéros du numérateur et du dénominateur de cette fraction. En déduire les singularités de la fonction f et préciser leur nature (apparentes, pôles (et de quel ordre) ou bien essentielles).
2. Calculer les résidus de la fonction f au voisinage de ses pôles éventuels.
   (Indication : on pourrait utiliser la "Question de cours")
3. Pour $R > \alpha$, soit $C_R^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$, à savoir le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R, et soit γ_R le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de C_R^+ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct (faire un dessin). Montrer que pour tout $R > \alpha$ on a : $\displaystyle\oint_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}$.
4. Montrer que si $z \in C_R^+$ avec $R > \alpha$, alors on a $|f(z)| \leq \dfrac{1}{R^2 - \alpha^2}$, et ensuite que l'on a, pour tout $R > \alpha$, $\displaystyle\left|\int_{C_R^+} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - \alpha^2}$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
6. Conclure, en trouvant la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + \alpha^2} dx$, puis de $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + \alpha^2} dx$.