Université de Cergy-Pontoise
L3 : Analyse complexe **Session 2013-2014**

Examen d'analyse complexe

Session 1 - Mercredi 30 avril 2014

Durée : 3 heures.

Barême indicatif : exo 1 (4pts), exo 2 (5pts), exo 3 (5pts), exo 4 (6pts), exo 5 (4pts).

Exercice 1 [Cours] : Enoncer et démontrer le principe du maximum.

Exercice 2 : Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en donnant une très brève justification.

1. La fonction $f(z) = z\bar{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est représentable sous la forme
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad \text{pour } z \neq 0.$$
3. La fonction $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ a un pôle au point 0.
4. La fonction $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ a une singularité apparente en 0.
5. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Alors f est constante.
6. Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$ peut avoir un nombre infini de zéros.

Exercice 3 : Soit $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$P(x, y) = e^x \sin y + x - y.$$

1) Montrer qu'il existe une unique fonction $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Q(0, 0) = 0$ et telle que $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ définisse une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2) En calculant l'expression explicite de Q, montrer que f est combinaison linéaire (que l'on précisera) des fonctions 1, z et e^z.

3) Soit C le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer
$$I = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z} dz, \quad J = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Tournez la page s.v.p. ↪

Exercice 4 : On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$. Le but de cet exercice est de démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(x)}{\cosh(x)} dx = \frac{\pi}{\cosh(\frac{\pi}{2})}. \tag{1}$$

1) On considère la fonction

$$f(z) = \frac{\cos(z)}{\cosh(z)} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^z + e^{-z}}.$$

Déterminer le domaine d'holomorphie de f.
2) Pour $R > 0$, on considère le rectangle Γ_R de sommets $\pm R$ et $\pm R + i\pi$ orienté dans le sens positif. Montrer que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi \cosh(\frac{\pi}{2}) = \pi \left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right). \tag{2}$$

3) En faisant tendre R vers $+\infty$, montrer en le justifiant que

$$\int_{[-R,+R]} f(z)dz \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$\int_{[R+i\pi, \quad R+i\pi]} f(z)dz \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\pi} e^{ix} + e^{\pi} e^{-ix}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

$$\int_{[R,R+i\pi]} f(z)dz \to 0, \quad \int_{[-R+i\pi,-R]} f(z)dz \to 0.$$

4) En prenant l'égalité entre les parties réelles de (2), en déduire le résultat (1) de l'énoncé.

Exercice 5 : Soit f une fonction analytique sur le disque $\{|z| < R\}$, $R > 0$ donné, telle que

$$|f'(z)| \leq M, \quad \forall |z| < R.$$

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est le développement en série entière de f pour $|z| < R$, montrer que

$$|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}.$$

[*Indication : on notera que na_n est le coefficient de z^{n-1} du développement en série entière de f'*]