L3 - S5 - 2013/2014 Examen : 23.06.2014

CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE COMPLEXE - SESS. 2

QUESTION de COURS : La série de Laurent de f autour de $z_0 \in \mathbb{C}$ (pôle unique & simple) est :

$$\underbrace{\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots}_{\text{partie entière (taylorienne)}}$$

où $a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0}(f)$. En multipliant par $(z-z_0)$ ci-dessus et tenant compte que la partie entière est une somme infinie convergente $S(z)$ on a : $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = a_{-1} + \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)S(z) = a_{-1}$.

EXERCICE I : ① $P(x,y) = a(x)\cos y$; $Q(x,y) = b(x)\sin y$ d'où $\frac{\partial P}{\partial x} = a'(x)\cos y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = -a(x)\sin y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = b'(x)\sin y$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = b(x)\cos y$

② ⓐ P et Q sont $\mathbb{R}^2$-différentiables, donc pour que f soit holomorphe il suffit que les relations Cauchy-Riemann soient satisfaites :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases} \overset{(1)}{\iff} \begin{cases} (a'(x)-b(x))\cos y = 0 \\ a(x) - b'(x)\sin y = 0 \end{cases}$$

et il est évident que $(*) \Rightarrow$ le système de gauche.

ⓑ (Obs : $(*) \Rightarrow a$ et b sont 2 fois dérivables et, par récurrence on peut m.q. $a, b \in C^\infty(\mathbb{R})$)

En dérivant la première eq. de $(*)$: $a'' = b'$ d'où $a'' - a = 0$. Eq. caract $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ "la" sol. générale est $a(x) = Ae^x + Be^{-x}$, $\forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$. Alors $b(x) = Ae^x - Be^{-x}$ où (A,B) est pour a et b le même couple de $(A,B) \in \mathbb{R}^2$;

ⓒ En remplaçant a et b ainsi trouvés ds. f on a :
$f(z) = Ae^x(\cos y + i\sin y) + Be^{-x}(\cos y - i\sin y) = Ae^{x+iy} + Be^{-x-iy}$

EXERCICE II : ① Avec la formule de l'Alembert on obtient $R = 1$, donc la série converge absolument sur $\mathring{B}(0;1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

② Tout point du cercle $\partial B(0;1)$ est du type $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Cas de figure :

- $\theta = 0 \iff z = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n+1}$ série de Riemann divergente.
- $\theta \in]0, 2\pi[$ (cas $z=-1$ inclus) on applique le critère d'Abel : $u_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n = e^{in\theta}$ (θ fixé !) vérifie $\left|\sum\limits_{n=1}^{p} v_n\right| = \left|e^{i\theta}\,\frac{e^{ip\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right| = \left|\frac{\sin(p\frac{\theta}{2})}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \le M_\theta < \infty$.

Donc $\forall \theta \in]0, 2\pi[$ la série est cvgte par crit. d'Abel.

③ D'après (1), on peut dériver $F(z)$ terme à terme en chaque $z \in D = \mathring{B}(0;1)$ et on a :
$F'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ sur D. Aussi,
$F(z) = z\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+1}$ d'où $F(0) = 0$.

④ ⓐ Obs : ϕ est holomorphe sur D (car produit et composée de fonctions holomorphes sur D) donc ϕ' est bien définie.

$\phi'(z) = ((1-z)e^{F(z)})' = -e^{F(z)} + (1-z)F'(z)e^{F(z)} \overset{(2)}{=} -e^{F(z)} + e^{F(z)} = 0$.

ⓑ En intégrant $\phi' = 0 \Rightarrow \phi = \text{cte} \in \mathbb{C}$ donc $e^{F(z)} = \frac{\text{cte}}{1-z}$; or $F(0) = 0$, d'où $\text{cte} = 1$.

EXERCICE III : ① $e^{iz} = e^{-y}.e^{ix}$ donc $|e^{iz}| = e^{-y} \neq 0$ $\forall y, \forall x$. Donc $e^{iz} \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
$z^2 + \alpha^2 = 0 \iff z_\pm = \pm i\alpha$.

Donc $f(z)$ n'a que 2 singularités : $\pm i\alpha$, qui sont des racines simples du dénominateur d'une fraction rationnelle. Ce sont donc des pôles simples (ceci peut être vu aussi en donnant une décomposition en él. simples de $\frac{1}{z^2+\alpha^2} = \frac{1}{(z+i\alpha)(z-i\alpha)}$ et en tenant compte que la multiplication par $e^{iz} \neq 0$, holomorphe, ne change rien à la conclusion.

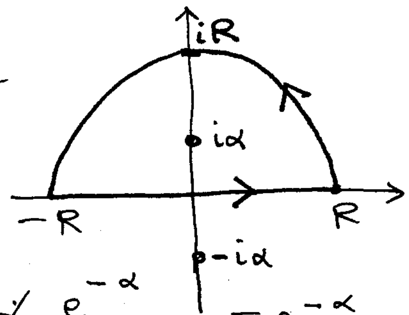
(2) On peut utiliser la "Question de cours" :

$$\lim_{z \to \pm i\alpha} (z \mp i\alpha) f(z) = \lim_{z \to \pm i\alpha} \frac{e^{iz}}{(z \pm i\alpha)} = \frac{e^{\pm i(i\alpha)}}{\pm 2i\alpha} = \pm \frac{e^{\mp\alpha}}{2i\alpha}$$

qui existe $\forall \alpha > 0$ (ce qui confirme que $\pm i\alpha$ sont pôles simples)

Donc $\mathrm{Res}_{\pm i\alpha}(f) = \pm \frac{e^{\mp\alpha}}{2i\alpha}$

(3) <u>Obs</u> : $R > \alpha$ assure que le pôle $i\alpha$ est à l'intérieur du contour $\gamma_R = [-R,R] \cup C_R^+$ (alors que $-i\alpha$ est à l'extérieur).



Alors, par le thm. des résidus :

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{i\alpha}(f) \underset{(2)}{=} \cancel{2\pi i} \cdot \frac{e^{-\alpha}}{\cancel{2i}\alpha} = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha}.$$

(4) $\forall z \in C_R^+$: $z = Re^{i\theta}$ avec $\theta \in]0,\pi[$. Donc :

$$|f(z)| = \left| \frac{\exp(Rie^{i\theta})}{R^2 e^{2i\theta} + \alpha^2} \right| = \frac{e^{-R\sin\theta}}{|R^2 + e^{-2i\theta}\alpha^2|} \underset{R>0}{\leq} \frac{1}{|R^2-\alpha^2|}$$

Or $|R^2-\alpha^2| = R^2-\alpha^2$ car $R > \alpha$ par hyp.

Ensuite $\left| \int_{C_R^+} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^\pi f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta \right| \leq$

$$\leq \sup_{\theta \in]0,\pi[} |f(Re^{i\theta})| \cdot R \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi R}{R^2-\alpha^2}$$

(5)

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{C_R^+} f(z)\,dz + \int_{[-R,R]} f(z)\,dz \qquad (*)$$

où $\int_{[-R,R]} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$ est cvgte, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |f(x)|\,dx.$$

Alors, en tenant compte de $(*)$, dans laquelle on passe à la limite $R \to \infty$ et en appliquant ce qu'on a obtenu à (4), on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{R^2-\alpha^2}}_{\longrightarrow\, =\, 0} = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

(6) Avec (3) et l'égalité ci-dessus :

$$I = \frac{\pi e^{-\alpha}}{\alpha} \quad \text{et} \quad J = \mathrm{Re}\, I = I.$$