CORRIGÉ de l'EXAMEN d'ANALYSE COMPLEXE

(ANNÉE 2013 - 2014 : 30 avril 2014 - SESSION 1)

EXERCICE 1 : Question de cours : voir les fiches distribuées à cet effet.

EXERCICE 2 : (1) FAUX : $f(z) = |z|^2 \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{C}$ et on sait que $\forall f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est holomorphe ssi elle est cte. Or, ce n'est pas le cas. Autrement : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z \neq 0$ en général

(2) VRAI : cf. cours, $\forall f : \mathbb{C}\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorphe est représentable en chaque $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ comme somme d'une série de Laurent : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Autrement dit, la couronne de cvgce de celle-ci est $\mathcal{C}(z_0; r, R)$ avec $r = 0$, $R = \infty$ i.e. $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$.

(3) FAUX : c'est une singularité essentielle, ce qu'on voit en donnant le DS de cos en la variable $X = \frac{1}{z}$: la partie Taylorienne est réduite à 1 et celle singulière a un nb infini de termes. Autrement : la limite $\lim_{z\to 0} z^n \cos\left(\frac{1}{z}\right)$ n'existe pas, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4) FAUX : si c'était le cas, on pourrait la prolonger par continuité en $z_0 = 0$. Or, soit $z_n = \frac{i}{n}$. Alors $-\frac{1}{z_n^2} = -(-1)n^2$ donc $e^{-1/z_n^2} = e^{n^2} \to \infty$. Autrement : en faisant le DS de $\exp X$ avec $X = -\frac{1}{z^2}$ on voit que la partie singulière est formée d'une infinité de termes.

(5) VRAI : f holomorphe $\Leftrightarrow$ f analytique (en chaque $z_0 \in \mathbb{C}$). Pour $z_0 = 0$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (DS Taylorienne). Or, si $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ne reste plus que le premier terme, donc $f(z) = f(0) = $ cte.

(6) VRAI : exemple : $z \mapsto \cos z$ est holom. sur $\mathbb{C}$ et sa restriction à $\mathbb{R}$ admet une infinité de 0.

EXERCICE 3 : Obs : on peut répondre à la question 1) sans calculer Q explicitement ; en effet, cf. un résultat connu, il suffit de vérifier que P est harmonique, i.e. $\Delta P = 0$. Or $\frac{\partial P}{\partial x} = e^x \sin y + 1$; $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = e^x \sin y$; $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 1$; $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -e^x \sin y$, d'où $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$.

2) ... Ou bien, on peut répondre à 1) et 2) en m̂ temps, en calculant Q explicitement, via les eq. de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = e^x \sin y + 1 & (\alpha) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - e^x \cos y & (\beta) \end{cases}$$

On intègre (α) (par rapp. à y) et on obtient $Q(x,y) = -e^x \cos y + y + \lambda(x)$, qu'on remplace dans (β) et on obtient :

$$-\cancel{e^x \cos y} + \lambda'(x) = 1 - \cancel{e^x \cos y}$$

d'où $\lambda(x) = x + \mu$ avec $\mu = $ cte.

Donc $Q(x,y) = -e^x \cos y + x + y + \mu$

et en imposant (cf. hypothèse) : $Q(0,0) = 0$ on déduit $0 = -1 + \mu$ i.e. $\mu = 1$.

On vient d'obtenir ainsi une unique fonction $Q(x,y) = -e^x \cos y + x + y + 1$, ce qui répond explicitement à la question 1).

Pour répondre à 2), on calcule :

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y) = e^x \sin y + x - y - ie^x \cos y + ix + iy + i$$
$$= -ie^x e^{iy} + (1+i)(x+iy) + i$$

d'où $\boxed{f(z) = -ie^z + (1+i)z + i \cdot 1.}$

3) Par la formule de Cauchy (sachant que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$) on a $\boxed{I = f(0) = 0.}$

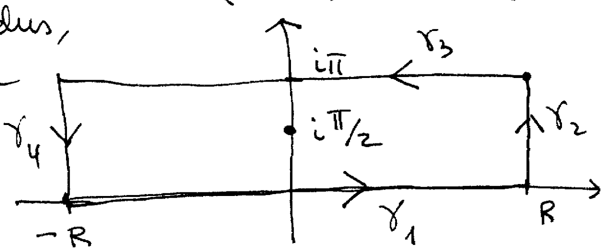
Pour J on peut utiliser la "formule de Cauchy pour les dérivées" ou bien on peut donner un DS de Laurent de $f(z)$ en 0 et intégrer celui-ci :

$$\frac{f(z)}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} + (1+i)z + i\right) =$$
$$= \frac{1}{z^2}\left((1+i) + (2+i)z + z^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}\right)$$
$$= \underbrace{\frac{1+i}{z^2} + \frac{2+i}{z}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^{n-2}}{n!}}_{\text{partie Taylorienne}}$$

d'où $\text{Res}_0\left(z \mapsto \frac{f(z)}{z^2}\right) = 2+i$ et par le thm des résidus : $J = 2\pi i$.

EXERCICE 4 : **1)** La fonction f est fraction rationnelle de deux fonctions holomorphes (combin. lin. d'exponentielles) donc son dom. d'holomorphie coïncide avec celui de déf. de f : $D_f = \{z\in\mathbb{C} \mid e^z + e^{-z} \neq 0\} =$
$= \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} \mid e^{2z} = -1\} = \mathbb{C} - \{i(\frac{\pi}{2}+k\pi) \mid \forall k\in\mathbb{Z}\}$.

2) Par le Thm. des résidus, sachant qu'à l'intérieur du contour il n'y a qu'une seule singularité, à savoir $z_0 = i\frac{\pi}{2}$,



on a : $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, \text{Rés}_{i\frac{\pi}{2}}(f)$

Ce résidu peut être calculé soit en donnant un DS de Laurent de f en $i\frac{\pi}{2}$ (ce qui est assez fastidieux) soit en établissant la nature de la singularité de f en $i\pi/2$ et, s'il s'agit d'un pôle, appliquer une des formules connues. Or, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(z) = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{-z}}$ et $h(z) = 1+e^{2z}$, donc g est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et h admet un zéro en $i\frac{\pi}{2}$ (seul pt. de l'intérieur du contour Γ_R) d'ordre 1, puisque le DS de h en $i\frac{\pi}{2} \sim (z-i\frac{\pi}{2})^1$.

On a donc $\text{Rés}_{i\frac{\pi}{2}}(f) = \frac{g(i\pi/2)}{h'(i\pi/2)} = \frac{e^{(i+1)i\frac{\pi}{2}} + e^{(1-i)i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\pi}}$
$= -\frac{e^{(i-1)\frac{\pi}{2}} + e^{(i+1)\frac{\pi}{2}}}{2} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2}\cdot(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}) = -e^{i\pi/2}\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$= -i\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$, d'où $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3) On choisit une paramétrisation pour chaque côté du rectangle Γ_R :

Pour γ_1 : $z = \gamma_1(x) = x$ donc $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,x'\,dx$ qui tend vers v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ quand $R\to\infty$, elle-même égale à $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ car f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour γ_3 : $z = \gamma_3(x) = i\pi - x$, $x\in[-R,R]$

donc $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(i\pi-x)} + e^{-i(i\pi-x)}}{e^{i\pi-x} + e^{-i\pi+x}}\cdot(i\pi-x)'\,dx$
$= \int_{-R}^{R}\frac{e^{-\pi}e^{-ix} + e^{\pi}e^{ix}}{\cancel{(-1)}(e^x+e^{-x})}\cancel{(-1)}\,dx = \int_{-R}^{R}\frac{\cos(i\pi + x)}{\cosh(x)}dx$
$\to \text{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\dots dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\dots$.

Pour γ_2 : $z = \gamma_2(y) = R+iy$, $y\in[0,\pi]$
$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi}\frac{e^{i(R+iy)} + e^{-i(R+iy)}}{e^{R+iy} + e^{-(R+iy)}}\cdot(R+iy)'\,dy =$

$$= i\int_0^{\pi} \frac{e^{iR}e^{-y} + e^{-iR}e^{y}}{e^{R}e^{iy} + e^{-R}e^{-iy}}\,dy.$$

Or, le numérateur est une quantité bornée, e^{-iy} aussi, donc $e^{-R}e^{-iy} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall y$ et $|e^{iy}|=1$ donc e^{iy} ne peut approcher zéro, d'où $|e^{R}e^{iy}| \to \infty$ donc la fraction tend à zéro quand $R\to\infty$.
Comme par ailleurs l'intégrand est intégrable, par convergence dominée on déduit que l'intégrale tend vers zéro quand $R\to\infty$.

<u>Pour γ_4</u> : $z = \gamma_4(y) = -R + i(\pi - y)$, $y\in[0,\pi]$ et on procède de la m̃ façon que pour γ_2.

4) De 2) et 3) on déduit :

$$\pi\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} + e^{-ix} + e^{-\pi}e^{ix} + e^{\pi}e^{-ix}}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

en prenant la partie réelle :

$$\pi\left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right) = \int_{-\pi}^{+\infty} \frac{(2 + e^{-\pi} + e^{\pi})\cos x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

or $2 + e^{-\pi} + e^{\pi} = \left(e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}\right)^2$, d'où

$$\frac{\pi}{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx$$

i.e. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>Exercice ⑤</u> :

f est analytique sur $D(0,R)$ et son développement en série entière est

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n.$$

Donc f' est aussi analytique sur $D(0,R)$ et son développement en série entière est donné par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

D'après la formule de Cauchy (et ses conséquences), on a :

$$n a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n}\,dz, \quad \forall 0<r<R$$

On en déduit d'après l'hypothèse que

$$|n a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{|z|=r}\frac{|f'(z)|}{|z|^n}\times 2\pi \leqslant \frac{M}{r^n} \quad \forall 0<r<R$$

En faisant tendre $r\to R$, on obtient :

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{n R^n}.$$