Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S6

Examen - Analyse Complexe - Session 2 - Mardi 19 juin 2012

Durée : 2h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.

Les 2 exercices sont indépendants.

Exercice I

Soit f la fonction définie par
$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}.$$
Pour $R > 0$, on note $\gamma_R = \partial B(0, R)$ le cercle de centre 0 et de rayon $R > 0$, orienté dans le sens trigonométrique direct.

1) Quel est le domaine de définition D de la fonction f ? La fonction f est-elle holomorphe sur D ? En déduire que l'on a
$$\int_{\gamma_{1/2}} f(z)dz = 0.$$
2) Décomposer f en éléments simples.

3) Donner le développement en série de Laurent de f autour du point 1. Montrer qu'il converge sur un disque privé de son centre, que l'on précisera. Quelle est la valeur du résidu en $z = 1$?

4) Montrer à l'aide de la formule de Cauchy que
$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{z-2} dz = 2i\pi$$
puis que
$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = 0.$$
5) En écrivant la formule des résidus pour $\int_{\gamma_3} f(z)dz$, en déduire la valeur du résidu en $z = 2$.

Exercice II

Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose
$$f(z) = e^{2x}(a(y) + ib(y))$$

1. Soient $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$. Donner l'expression de $P(x, y)$ et de $Q(x, y)$, puis, à l'aide des dérivées des fonctions a et b, donner celles des dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$.
2. Dans la suite, on suppose que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a
$$\begin{cases} a'(y) = -2b(y) \\ b'(y) = 2a(y) \end{cases} \qquad (*)$$
   (a) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

   (b) Montrer que a vérifie une équation différentielle du second ordre, que l'on résoudra. En déduire qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall y \in \mathbb{R}, b(y) = A \sin(2y) + B \cos(2y)$$
   (c) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel que f soit donnée par :
$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = Ce^{2z}$$