Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S6

Examen - Analyse Complexe - Session 1 - Mardi 10 avril 2012

Durée : 3h00 - Documents, calculatrice, ordinateur et téléphone portable ne sont pas autorisés.

Les 3 exercices sont indépendants.

Exercice I

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$Q(x, y) = 3x^2 y - y^3 - 2x.$$

1. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

   Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

   $$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y), \text{ si } z = x + iy$$

   soit holomorphe sur $\mathbb{C}$.

2. Ecrire les relations qui lient les dérivées partielles $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$.

3. En utilisant l'expression de $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, en déduire que

   $$P(x, y) = x^3 - 3y^2 x + a(y),$$

   où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. Calculer alors $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ et en déduire l'expression exacte de $P(x, y)$.

4. Montrer que la fonction f est donnée par

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z) = z^3 - 2iz + A,$$

   avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice II

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière, c'est à dire holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que f ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$: $\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z) \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $g(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

1. Justifier l'existence d'une suite complexe $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \ g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n.$$

   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^n$?

2. En déduire qu'il existe une fonction $G_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que

   $$\forall z \in \mathbb{C},\ \ G_0'(z) = g(z) \text{ et } G_0(0) = 0$$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\phi(z) = f(z) e^{-G_0(z)}$.

(a) Calculer $\phi'(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

(b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = f(0)e^{G_0(z)}$.

(c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la fonction holomorphe $G(z) = G_0(z) + \lambda$ vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ f(z) = e^{G(z)}\ \ (*)$$

(d) Une fonction G holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $(*)$ est-elle unique ?

Exercice III

On définit la fonction f par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 2z + 2}.$$

1. Montrer que la fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$ où $z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \bar{z_1}$ et que z_1 et z_2 sont des pôles de f. Préciser leur ordre et déterminer les résidus de la fonction f au voisinage de z_1 et z_2.
2. Pour $R \geq 2$, soit C_R^+ le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R défini par

$$C_R^+ = \{z \in \mathbb{C}\ \mid\ |z| = R \text{ et } Im(z) > 0\}$$

et soit γ_R le lacet constitué du segment réel $[-R, R]$ suivi de C_R^+ parcouru une fois dans le sens trigonométrique direct.

a) Représenter sur une figure γ_R pour un $R \geq 2$ et les points z_1 et z_2.

b) Montrer que pour tout $R \geq 2$,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \pi e^{-(1+i)}.$$

3. Montrer que si $z \in C_R^+$ avec $R \geq 2$, alors on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|(z+1)^2 + 1|} \leq \frac{1}{(R-1)^2 - 1},$$

et ensuite que l'on a, pour tout $R \geq 2$,

$$\Big|\int_{C_R^+} f(z)dz\Big| \leq \frac{\pi R}{(R-1)^2 - 1}.$$

4. En déduire que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

5. Donner la valeur de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 2}dx.$$