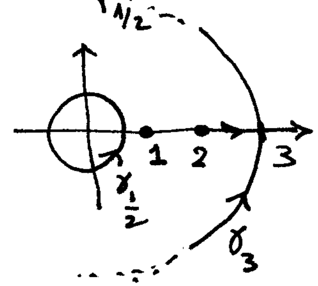
L3 - S2 - ANALYSE COMPLEXE - 2011 - 2012

CORRIGE du SUJET de la SESSION 2 (19.06.2012)

EXERCICE 1

: **1** $z^2-3z+2=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $z=2$ d'où $D=\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$ et f est holomorphe sur D par Thm. général (f est fract. rationnelle de fonct. holomorphes). Comme $1,2 \notin \overline{B(0;1/2)}$ par Thm. de Cauchy (comme f est holomorphe sur $B(0;1/2)$) on a $\oint_{\gamma_{1/2}} f(z)dz = 0$.

2 $f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.



4 $1,2 \in \overset{\circ}{B}(0;3)$

$g_1(z)=1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc par formule de Cauchy:

$$\oint_{\gamma_3} \frac{1}{z-2}dz \equiv \oint \frac{g_1(z)}{z-2}dz \overset{\downarrow}{=} 2\pi i\, g_1(2) = 2\pi i$$

En utilisant (2) et en posant $g_2(z)=1$ on a:

$$\oint_{\gamma_3} f(z)dz \underset{(2)}{=} \oint_{\gamma_3}\frac{dz}{z-2} - \oint_{\gamma_3}\frac{dz}{z-1} = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

3 Avec (2), sachant que $z \mapsto \dfrac{1}{z-2}$ est holomorphe sur $\overset{\circ}{B}(2;1)$, elle admet un developpt en série entière sur cette boule ouverte, qui sera la partie entière (ou Taylorienne) du D.S. Laurent de f autour de 1. Le rayon de cvgce de celle-ci étant 1, ce sera aussi le grand rayon R de la couronne de cvgce de la S. Laurent de f. Aussi, la partie singulière de la série de Laurent de f en 1, est formée du seul élement $\dfrac{-1}{z-1}$ (qui est donc un poly. de $d^o=1$ en variable $\dfrac{1}{z-1}$) et par conséquent la partie singulière du D.S. Laurent de f converge sur $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. Conclusion: la série de Laurent de f cverge sur la couronne ouverte : $\overset{\circ}{B}(1;1)\setminus\{1\} \equiv \mathcal{C}(1; r=0; R=1)$. On a:

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{-(z-1)+1} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \quad \forall z \in \mathcal{C}(1;0,1)$$

d'où $\operatorname{Res}(f;1) = -1$ (coeff. de $\dfrac{1}{z-1}$)

5 $\overset{\circ}{B}(0;3)$ contient toutes les singularités de f, à savoir 1 et 2 (ce sont des pôles d'ordre 1). On a donc par le Thm des résidus:

$$\oint_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;1) + \operatorname{Res}(f;2)\right)$$

d'où, avec (3) et (4) $\Rightarrow 2\pi i \operatorname{Res}(f;2) = 0 + 2\pi i\cdot 1$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f;2) = 1$

EXERCICE 2

: **1** $P(x,y) = e^{2x}a(y)$
$Q(x,y) = e^{2x}b(y)$

$\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2e^{2x}a(y)$; $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^{2x}a'(y)$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2e^{2x}b(y)$; $\dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = e^{2x}b'(y)$

(2) (a) Cf (1) : $\frac{\partial P}{\partial x} = 2P$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2Q$ et par $(*)$ on déduit $\frac{\partial P}{\partial y} = -2Q$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = +2P$ d'où on déduit que les éq. de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

sont vérifiées $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ (i.e. $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$).

Par ailleurs, a et b étant dérivables sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto e^{2x}$ étant $C^\infty(\mathbb{R})$ on déduit des déf. de P et Q (voir (1)) que P et Q sont différentiables.

Conclusion $f = P + iQ$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (i.e. entière).

(b) De $(*)$ on déduit :

$$a'' = -2b' \underset{(*)}{=} -4a \quad \text{i.e. } a'' + 4a = 0$$

Eq. caract. $r^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow r_\pm = \pm 2i$

donc sol. complexe

$$\tilde{a}(y) = \lambda e^{2iy} + \mu e^{-2iy}$$

à laquelle en imposant $\tilde{a} = \overline{(\tilde{a})}$ on arrive par méth. standard à $a(y) = \alpha \cos(2y) + \beta \sin(2y)$ $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Ensuite de la 2ème eq. de $(*)$, par intégration, on déduit :

$$b(y) = \cancel{2}\frac{\alpha}{\cancel{2}} \sin(2y) + \cancel{2}\left(-\frac{\beta}{\cancel{2}}\right)\cos(2y) + \gamma$$

qu'on remplace en $a'(y) = -2b(y)$ d'où $\gamma = 0$. Donc en posant $\alpha = A \in \mathbb{R}$ et $-\beta = B \in \mathbb{R}$ on obtient pour une infinité de couples $(A, B) \in \mathbb{R}^2$:

$$b(y) = A\sin(2y) + B\cos(2y), \ \forall (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

(c) Avec les $a(y)$ et $b(y)$ trouvés à (b), et pour toutes paires de nb. $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$f(z) = P + iQ = e^{2x}A\cos(2y) - e^{2x}B\sin(2y) + e^{2x}iB\cos(2y) + e^{2x}iA\sin(2y)$$

donc en groupant le premier avec le 4ème et le 2ème avec le 3ème et en utilisant $i^2 = -1$ et $e^{i(2y)} = \cos(2y) + i\sin(2y)$ on obtient $\forall z \in \mathbb{C}$ $(z = x+iy)$:

$$f(z) = e^{2x}A(\cos(2y) + i\sin(2y)) + e^{2x}B(i\cos(2y) + i^2\sin(2y)) = (A+iB)e^{2x}e^{-2iy} \equiv \lambda e^{2z}$$

où $\lambda = A + iB \in \mathbb{C}$.