Université de Cergy-Pontoise - Licence L3-S6

Corrigé Examen Analyse Complexe S1- Mardi 10 avril 2012

Exercice I

1.
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy - 2, \ \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$

2. Relations de Cauchy-Riemann :
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

3. On a donc :
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$$
d'où
$$P(x,y) = x^3 - 3y^2x + a(y),$$
où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. On a alors
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy + a'(y) = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -6xy + 2,$$
donc $a'(y) = 2$ d'où $a(y) = 2y + A$ avec $A \in \mathbb{R}$. Donc $P(x,y) = x^3 - 3y^2x + 2y + A$.

4. Pour $z = x + iy$, on a donc
$$\begin{aligned} f(z) &= P(x,y) + i\,Q(x,y) = x^3 - 3y^2x + 2y + A + i(3x^2y - y^3 - 2x) \\ &= x^3 + 3ix^2y - 3y^2x - iy^3 - 2i(x+iy) + A = z^3 - 2iz + A, \end{aligned}$$
avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice II

1. Comme g est holomorphe sur $\mathbb{C}$, elle est analytique et donc DSE autour de 0 sur le disque maximal inclus dans $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{C}$. Il existe donc une suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et que l'on ait :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$
On a
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ |\frac{b_{n-1}}{n} z^n| \leq |z|(|b_{n-1}z^{n-1}|)$$
et $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_{n-1}z^{n-1}| < +\infty$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^n$ est donc infini.

2. On pose
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ G_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^n,$$
ce qui définit une fonction $G_0 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur $\mathbb{C}$ (car une SE est holomorphe sur son disque ouvert de convergence) telle que $G_0(0) = 0$ et
$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ G_0'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{b_{n-1}}{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = g(z).$$

3. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z)e^{-G_0(z)}$.
   (a) On a pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   $$\phi'(z) = (f'(z) - f(z)G_0'(z))e^{-G_0(z)} = (f'(z) - f(z)g(z))e^{-G_0(z)} = 0.$$
   (b) On en déduit que ϕ est constante sur $\mathbb{C}$, donc $\phi(z) = \phi(0) = f(0)$ d'où $f(z) = f(0)e^{G_0(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   (c) La fonction exponentielle est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, et $f(0) \neq 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $e^{\lambda} = f(0)$; la fonction holomorphe $G(z) = G_0(z) + \lambda$ vérifie alors
   $$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ f(z) = e^{G(z)}.$$
   (d) Si la fonction G holomorphe sur $\mathbb{C}$ vérifie $(*)$, alors la fonction $z \mapsto G(z) + 2i\pi$ convient également, donc la fonction G n'est pas unique.

Exercice III

1. On constate sur la figure que $Ind(a, \gamma_R) = 1$ et $Ind(\bar{a}, \gamma_R) = 0$.
2. On a pour tout $R > |a|$,
$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z-a)(z-\bar{a})} dz = \int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z-a)} dz,$$
où $g(z) = \frac{e^{iz}}{z-\bar{a}}$ est holomorphe sur $\bar{D}(0, 2R) \cap \{Im(z) \geq 0\}$. En utilisant la formule de Cauchy pour g en a, on obtient donc
$$\int_{\gamma_R} \frac{g(z)}{(z-a)} dz = 2i\pi g(a) = 2i\pi \frac{e^{ia}}{a - \bar{a}} = \frac{\pi e^{ia}}{Im(a)},$$
d'où
$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi e^{ia}}{Im(a)}.$$
3. On pose $\gamma(t) = Re^{it}$ pour $t \in [0, \pi]$ de sorte que $C_R^+ = \gamma([0, \pi])$, parcouru dans le sens trigonométrique. Si $z \in C_R^+$, alors comme $\sin(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \pi]$, on a
$$|e^{iz}| = |e^{iRe^{it}}| = e^{-R\sin(t)}| \leq 1$$
et comme $|z| = R > |a|$ et $|\bar{a}| = |a|$, on a
$$|z - a| \geq |z| - |a| > 0 \text{ et } |z - \bar{a}| \geq |z| - |a| > 0$$

donc finalement

$$|f(z)| = \frac{|e^{iz}|}{|z-a||z-\bar{a}|} \leq \frac{1}{(|z|-|a|)^2} \leq \frac{1}{(R-|a|)^2}.$$

On en déduit

$$\Big|\int_{C_R^+} f(z)dz\Big| \leq \frac{1}{(R-|a|)^2}\Big|\int_{C_R^+} 1\,dz| \leq \frac{\pi R}{(R-|a|)^2}.$$

4. On a

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{C_R^+} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

D'après la question 3, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} f(z)dz = 0.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = \dfrac{1}{x^2 - 2Re(a)x + |a|^2} > 0$ et $f(x) \sim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2}$ donc $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < +\infty$ et par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[-R,R]}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx.$$

On a donc

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

5. Les racines de l'équation $z^2 + 2z + 2 = 0$ sont $a = -1 + i$, avec $Im(a) > 0$, et $\bar{a} = -1 - i$ de sorte que $z^2 + 2z + 2 = (z+1-i)(z+1+i) = (z-a)(z-\bar{a})$ d'où

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi e^{ia}}{Im(a)} = \pi e^{-(1+i)}.$$