Analyse complexe (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen[1] du 28 avril 2011, durée : 3 heures
Les notes de cours ne sont pas autorisées
Les téléphones portables doivent être éteintes

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse sans justification. Chaque bonne réponse vaut 0,5 point.

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction infiniment différentiable. Alors la fonction f considérée comme une fonction d'une variable complexe est holomorphe.

   Vrai *Faux*

2. La fonction $f(z) = (\operatorname{Re} z)^4 + (\operatorname{Re} z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

   Vrai *Faux*

3. Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est continue.

   Vrai *Faux*

4. Soit $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors f est représentable sous la forme
$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad \text{pour } z \neq 0.$$

   Vrai *Faux*

5. La fonction $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ a un pôle au point $z = 0$.

   Vrai *Faux*

6. La fonction $f(z) = e^{-1/z^2}$ a une singularité apparente au point $z = 0$.

   Vrai *Faux*

7. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. Alors f est constante.

   Vrai *Faux*

8. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(z) \to 0$ quand $z \to \infty$. Alors f est constante.

   Vrai *Faux*

9. Le résidu d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ au point $z = 0$ peut être égal à ∞.

   Vrai *Faux*

[1] *La note finale est calculée par la formule* Note finale $= \min(N1, 10) + N2$, *où $N1$ et $N2$ sont les notes pour les parties I et II.*

10. Une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ peut avoir un nombre infini de zéros.

Vrai *Faux*

Questions de cours. **(a)** **(1 point)** Donner la définition d'une fonction analytique dans un domaine $D \subset \mathbb{C}$.

(b) **(2 points)** Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que f vérifie les relations de Cauchy–Riemann.

(c) **(2 points)** Énoncer le théorème sur les zéros isolés d'une fonction holomorphe.

Questions de TD. **(a)** **(2 points)** Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

(b) **(3 points)** Soit γ le cercle $|z| = 1$ parcouru dans le sens positif. Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{1}{4z^2 - 8z + 3}\, dz.$$

Deuxième partie

Exercice 1. **(2 points)** Déterminer le rayon de convergences des séries entières

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Exercice 2. **(2 points)** Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $h(z) = |z^2 - 2z + 2|$ sur le disque $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

Exercice 3. Soit $f(z) = e^z(z^2+1)^{-1}$.

(a) **(1 point)** Montrer que f est holomorphe dans le domaine $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$.

(b) **(2 points)** Écrire les trois premiers termes du développement de Laurent de f dans le voisinage des points $z = i$, $z = -i$, $z = 0$ et déterminer les domaines de convergence correspondants.

(c) **(1 point)** Déterminer les zéros et les pôles f et préciser leur ordres.

(d) **(2 points)** Soit $R > 0$ et Γ_R le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ parcouru dans le sens positif. Pour $R \neq 1$ calculer l'intégrale

$$I(R) = \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz.$$

Corrigé de l'examen pour le cours *Analyse complexe*

Questions 1–10. 1. Faux, 2. Faux, 3. Vrai, 4. Vrai, 5. Faux, 6. Faux, 7. Vrai, 8. Vrai, 9. Faux, 10. Vrai □

Questions de cours. **(a)** Une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est dite *analytique* si pour tout point $z_0 \in D$ il existe un disque $D(z_0, r)$ dans lequel f est représentable comme une série entière:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r.$$

(b) Soit $f(z) = u(z) + iv(z)$ une fonction holomorphe dans D avec u et v réels. Alors

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \, \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \Big) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

où $z = x + iy = (x, y)$. De même,

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \Big(\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i \Delta y} + i \, \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{i \Delta y} \Big) = -i \, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

En comparant ces deux relations, on conclut que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(c) Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non nulle. Alors l'ensemble $\{z \in D : f(z) = 0\}$ n'a pas de points d'accumulation dans D. □

Questions de TD. **(a)** D'après le théorème de Cauchy sur les résidus, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4} \, dx &= 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, e^{i\pi/4}) + \mathrm{Res}(f, e^{3i\pi/4}) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,(i - 1)} + \frac{1}{2\sqrt{2}\,(i + 1)} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

où $f(z) = (1 + z^4)^{-1}$.

(b) Le polynôme $P(z) = 4z^2 - 8z + 3$ a deux racines, $1/2$ et $3/2$. Donc, d'après le théorème de Cauchy sur les résidus, on obtient

$$\int_\gamma \frac{1}{P(z)} \, dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(P^{-1}, 1/2) = -\frac{i\pi}{2}.$$

□

Exercice 1. En utilisant la formule $R = (\limsup_n |a_n|^{1/n})^{-1}$, on obtient $R_1 = \infty$ et $R_2 = 1$ pour les rayons de convergence de la première et deuxième séries. □

Exercice 2. Le polynôme $P(z) = z^2 - 2z + 2$ s'annule aux points $1 \pm i \in K$, donc le minimum de h est égal à zéro. D'après le principe de maximum, le maximum de h est atteint sur le bord. On a $h(-2) = 10$ et $h(z) \leq |z^2| + 2|z| + 2 = 10$ pour $|z| = 2$, donc le maximum est égal à 10. $\square$

Exercice 3. **(a)** Les fonction $f_1(z) = e^z$ et $f_2(z) = z^2+1$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, donc leur quotient f_1/f_2 est holomorphe dans le domaine $\mathbb{C} \setminus \{\text{zéros de } f_2\}$, d'où le résultat.

(b) On note R_a le rayon de convergence du développement de Laurent au voisinage du point $a \in \mathbb{C}$. Alors $R_i = R_{-i} = 2$ et $R_0 = 1$.

Pour écrire les premiers termes des développements de f, on utilise les développements des fonctions e^z et $(z^2+1)^{-1}$ en séries entières. Dans le voisinage du point $z = 0$, on a

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots, \\ (z^2+1)^{-1} &= 1 - z^2 + z^4 + \cdots. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$f(z) = 1 + z - \frac{z^2}{2} + \cdots.$$

Dans le voisinage du point $z = i$, on a

$$\begin{aligned} e^z = e^i e^{z-i} &= e^i\big(1 + (z-i) + \frac{(z-i)^2}{2} + \frac{(z-i)^3}{6} + \cdots\big), \\ (z^2+1)^{-1} &= (2i)^{-1}(z-i)^{-1}\big(1 - i\tfrac{z-i}{2}\big)^{-1} \\ &= (2i)^{-1}(z-i)^{-1}\big(1 - \tfrac{i}{2}(z-i) + \tfrac{1}{4}(z-i)^2 + \cdots\big), \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$f(z) = \frac{e^i}{2i}\Big((z-i)^{-1} + \big(1 - \tfrac{i}{2}\big) + \big(\tfrac{3}{4} - \tfrac{i}{2}\big)(z-i) + \cdots\Big).$$

Un argument similaire donne le développement de f dans le voisinage de $z = -i$:

$$f(z) = \frac{ie^{-i}}{2}\Big((z+i)^{-1} + \big(1 + \tfrac{i}{2}\big) + \big(\tfrac{1}{4} + \tfrac{i}{2}\big)(z+i) + \cdots\Big).$$

(c) La fonctions f n'a pas de zéros et a des pôles d'ordre 1 aux points i et $-i$.

(d) En utilisant le théorème de Cauchy sur les résidus, on obtient

$$I(R) = \begin{cases} 0, & 0 < R < 1, \\ \pi(e^i - e^{-i}), & R > 1. \end{cases}$$

$\square$