Université de Cergy-Pontoise
Mai 2015

Algèbre Linéaire et Bilinéaire

Licence Mathématiques-Physique-Informatique, troisème année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Deux questions techniques - 5 points

1. Soit A une matrice à coefficients réels dont les polynômes caractéristiques et minimaux sont :
$$\chi_A(X) = X^4(X-2)^3, \qquad \mu_A(X) = X^2(X-2)^3$$
Donner toutes les réduites de Jordan compatibles avec ces hypothèses, et préciser chaque fois la dimension du noyau de A. Justifier votre réponse.
2. Donner la décomposition de Gauss, la signature et le rang de la forme quadratique réelle définie par
$$q(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4$$
où x désigne un vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4). On détaillera les calculs.

Exercice 1 - 5 points

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ la matrice définie par
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 12 & 4 \end{pmatrix}$$
On note I_n la matrice de l'identité dans $\mathcal{M}_n(K)$.

1. Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer le polynôme minimal de A et en déduire la forme de la réduite de Jordan de A. On ne demande pas de donner une base de Jordan de A.
3. Montrer que si on pose $D = I_3$ et $N = A - D$, alors $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A.
4. D'une façon générale (A est une matrice de $\mathcal{M}_n(K)$, où K est un corps commutatif) démontrer que la décomposition de Dunford de A s'écrit $A = D + N$ avec $D = \lambda I_n$ et $N = A - D$ si et seulement si le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (-1)^n(X-\lambda)^n$.

Exercice 2 - 5 points

1. Dans cette question $E = \mathbb{R}^3$, et q est la forme quadratique définie par
$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$
où (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées de $x \in E$ dans la base canonique. On notera ϕ la forme bilinéaire associée à q. Si a est un nombre réel, on se donne deux vecteurs u et v par
$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que u et v sont indépendants. On note F le plan $\mathrm{vect}(u, v)$, et q' la restriction de q à F. Déterminer la matrice de q' dans la base (u, v) de F, puis la signature de q', en fonction de a.
2. Dans cette question E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n. Soit q une forme quadratique de signature $(n-1, 1)$.
   (a) Montrer qu'il existe un vecteur x tel que $q(x) < 0$.
   (b) Montrer que la restriction de q à $H = \mathrm{vect}(x)^{\perp}$ est définie positive.

Exercice 3 - 5 points

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ (K est un corps commutatif). Soit f un endomorphisme de E. On se propose de démontrer le résultat suivant :
λ est racine simple du polynôme minimal de f si et seulement si $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.
Dans tout l'exercice, on suppose que λ est valeur propre de f, donc racine au moins simple du polynôme minimal.

1. Montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \iff E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$$
2. On suppose que $E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) + \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ et que le polynôme minimal de f s'écrit
$$\mu_f(X) = (X - \lambda)^2 Q(X)$$
où Q est un polynôme de $K[X]$. Montrer que
$$P(X) = (X - \lambda) Q(X)$$
est un polynôme annulateur de f et en déduire
$E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ implique λ est racine simple du polynôme minimal de f.
3. On suppose que le polynôme minimal de f s'écrit $\mu_f(X) = (X - \lambda) Q(X)$ où $Q(\lambda) \neq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que $1 = A(X)Q(X) + B(X)(X - \lambda)$ et en déduire qu'alors
$$E = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E)$$