Session mai 2015- algèbre linéaire, première session, corrigé

Questions préliminaires et techniques

1. Le degré du polynôme caractéristique est 7, donc la dimension est 7. Le polynôme caractéristique est scindé et il a deux racines 0 et 2. La valeur propre 0 est de multiplicité 4, donc le sous-espace caractéristique est de dimension 4. L'exposant de X dans le polynôme minimal est 2, c'est la taille du plus grand bloc de Jordan. Comme $4 = 1 + 1 + 2 = 2 + 2$, il y a deux possibilité pour la réduite de Jordan. Pour la valeur propre 2, le sous-espace caractéristique est de dimension 3, et le plus grand bloc est de taille 3. En résumé, il y a deux réduites de Jordan possibles :

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 &&&&&& \\ & 0 &&&&& \\ && 0 & 1 &&& \\ && 0 & 0 &&& \\ &&&& 2 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & 2 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 &&&&& \\ 0 & 0 &&&&& \\ && 0 & 1 &&& \\ && 0 & 0 &&& \\ &&&& 2 & 1 & 0 \\ &&&& 0 & 2 & 1 \\ &&&& 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Dans le premier cas, la dimension du sous-espace propre pour la valeur propre 0 est 3 (nombre de blocs), 2 dans le second cas. Dans les deux cas, la dimension du sous-espace propre pour la valeur propre 2 est 1.

2. $$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_4)^2 - 4x_2^3 - x_4^2 + 4x_2x_4 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_4)^2 + x_2^2 - 4x_2x_3 - x_4^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 4x_3^2 - x_4^2 \end{aligned}$$

   La signature est donc $(2, 2)$ et le rang est 4.

Exercice 1

1. $$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} -2-X & -4 & -1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 9 & 12 & 4-X \end{vmatrix} = (-2-X)(1-X)(4-X)+9(1-X) = -X^3+3X^2-3X+1 = -(X-1)^3$$

2. Le polynôme minimal ne peut être $X - 1$, sinon A serait la matrice de l'identité. Calculant $(A - I)^2$, on trouve que c'est la matrice nulle. La réduite de Jordan contient, pour la seule valeur propre 1, un bloc de taille 2. On a donc

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Le sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}(A - I_3)^3$ est égal à E. La matrice D représentant l'homothétie de rapport 1 sur E est donc I_3 et la matrice N de la décomposition de Dunford est $N = A - D$. Bien sûr, I_3 et N commutent. On peut également observer que $N = A - I$ est la matrice de la question précédente, dont le carré est nul.

4. La réponse à la question précédente prouve que si la polynôme caractéristique est de la forme indiquée, la réduction de Dunford est bien celle décrite. Réciproquement, $N = (A - \lambda I_n)$ nilpotente prouve qu'un polynôme annulateur de A est de la forme $(X - \lambda)^k$, donc le polynôme minimal est de la même forme, est le polynôme caractéristique aussi (mêmes facteurs irréductibles et multiple du polynôme minimal).

Exercice 2

1. u et v sont indépendants : par exemple, la matrice ayant pour colonnes u et v est de rang 2 puisqu'un déterminant extrait de taille 2, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ est non nul. Calculons :
$$q(u) = 0^2 + 1^2 - 0^2 = 2, \qquad q(v) = a^2 + 1^2 - 1^2 = a^2, \qquad \phi(u,v) = 0.a + 1.1 - 0.1 = 1$$
La matrice est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix}$. Si λ et μ sont les coordonnées d'un vecteur dans la base (u,v), on a
$$q'(x) = \lambda^2 + 2\lambda\mu + a^2\mu^2 = (\lambda+\mu)^2 + (a^2-1)\mu^2$$
La signature est $(2,0)$ si $|a| > 1$, $(1,0)$ si $|a| = 1$ et $[1,1)$ si $|a| < 1$.
2. (a) On sait qu'il existe une base dans laquelle la matrice de q est diagonale de diagonale $(1, 1, \ldots, 1, -1)$. Il suffit de prendre le dernier vecteur de base.
   (b) Si $q(x) < 0$, alors $H = vect(x)^{\perp}$ est un supplémentaire de $\mathrm{vect}(x)$. La réunion d'une base orthogonale de F avec x est une base de E. Par le théorème de Sylvester, la restriction à H est forcément définie positive pour que la signature soit $(n-1, 1)$.

Exercice 3

1. L'implication $\Rightarrow$ résulte de la définition de la somme directe. Pour l'implication $\Leftarrow$, on utilise le théorème du rang :
$\dim \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E) + \dim \mathrm{Im}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E) = n$.
et le fait que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$; cela prouve que l'intersection du noyau et de l'image est de dimension nulle, donc que la somme est directe.
2. On a $P(f) = (f - \lambda \, \mathrm{id}_E) \circ q(f)$. Soit $x \in E$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E)$ et $x_2 [= * \mathrm{Im}(f - \lambda \, \mathrm{id}_E)$. Alors $P(f)(x) = P(f)(x_1) + P(f)(x_2)$. Mais
$$P(f)(x_1) = Q(f) \circ (f - \lambda \, \mathrm{id}_E)(x_1) = 0$$
et, puisque x_2 peut s'écrire $x_2 = (f - \lambda \, \mathrm{id}_E)(x_3)$, on a
$$P(f)(x_2) = Q(f) \circ (f - \lambda \, \mathrm{id}_E)(x_2) = Q(f) \circ (f - \lambda \, \mathrm{id}_E)^2(x_3) = \mu_f(f)(x_3) = 0$$
Ainsi $P(f)$ est l'endomorphisme nul. Il y a contradiction par définition du polynôme minimal car P est de degré inférieur strict à celui de μ_f. Conclusion : λ est racine simple du polynôme minimal.
3. Puisque $Q(\lambda) \neq 0$, le polynôme irréductible $X - \lambda$ n'est pas diviseur de Q et Q et $X - \lambda$ sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bezout, il existe A et B tels que $1 = A(X)Q(X) + B(X)(X - \lambda)$. Appliquons cette identité à l'edomorphisme f :
$$\mathrm{id}_E = Q(f) \circ A(f) + (f - \lambda \, \mathrm{id}_E) \circ B(f)$$
puis à x quelconque dans E :
$$x = Q(f) \circ A(f)(x) + (f - \lambda \, \mathrm{id}_E) \circ B(f)(x)$$
il reste à vérifier que le premier vecteur est dans le noyau, le second dans l'image, de $f - \lambda \, \mathrm{id}_E$.