Avril 2014
L3
Mathématiques

Algèbre linéaire et bilinéaire

Aucun document ou calculatrice autorisé.
Une réponse sans aucune justification sera considérée comme fausse.

1. Question de cours (*5 points*)

Énoncer et démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

2. Exercices

Exercice 1. (*3 points*)
a) (*1,5 pts*) Calculer la signature de la matrice symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) (*1,5 pts*) Calculer, si elle existe, l'unique matrice symétrique positive A telle que $A^2 = S$.

Exercice 2. (*3 points*) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. On suppose en plus que A est définie positive.

a) (*1 pt*) Démontrer que $(\mathbb{R}^n, s)$ où

$$s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto s(x,y) = {}^t x A^{-1} y$$

est un espace euclidien.

b) (*1 pt*) Démontrer que AB est un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, s)$.

c) (*1 pt*) Démontrer que si AB est une matrice nilpotente alors $B = 0$.

Exercice 3. (*9 points*)
a) (*1 pt*) Donner la réduite de Jordan et le polynôme minimal de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Tournez SVP

b) (*1,5 pts*) Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme de V tel que

$$\chi_f(x) = (-1)^n \mu_f(x) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - x)^{n_i} \qquad \lambda_i \in \mathbb{C},\, n_1 + \cdots + n_r = n.$$

Écrire la réduite de Jordan de f.

c) (*2,5 pts*) Soit $p = p(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$ et soit $C(p)$ la matrice compagnon de p i.e.

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que $M_{\mathcal{B}}(f) = C(p)$.

Démontrer que $p(f)(\mathbf{e}_1) = 0$. En déduire d'abord le polynôme minimal de $C(p)$ et ensuite le polynôme caractéristique (dans cet ordre).

d) (*2 pts*) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que $\chi_A(x) = (-1)^n \mu_A(x)$ si et seulement si il existe un polynôme unitaire $p \in \mathbb{C}[x]$ tel que A est semblable à $C(p)$.

Exercice 4. (*2 points*) Déterminer toutes les matrices symétriques positives $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^5 + A^3 + A = 3Id.$$