

EXERCICE 1

a)

$$X_A(x) = -x(x^2 - 17x + 16) \quad , \quad \text{Spec}(A) = \{0, 1, 16\} \Rightarrow \text{sgn}(A) = (2, 0) \quad (\text{on utilise un corollaire du thm spectral})$$

b)

$$V_0(A) = \langle (0, 1, 1) \rangle, \quad V_1(A) = \langle (1, 1, -1) \rangle, \quad V_{16}(A) = \langle (-2, 1, -1) \rangle \Rightarrow \text{la matrice } P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

et telle que ${}^tP = P^{-1}$ car les colonnes forment une base orthonormale de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} {}^tP \quad \text{d'où} \quad S = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

NB! si P n'est pas orthogonale $S = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ n'est pas symétrique!

EXERCICE 2

a) Il faut d.q. A^T est symétrique def. positive. Or ${}^tA = A$ et $AA^T = A^T A = \text{Id}$ impliquent

$$(AA^T)^T = ({}^tA^T A) = \text{Id} = \text{Id} \text{ i.e. } {}^tA^T A = A {}^tA^T = \text{Id} \text{ et } {}^tA^T = A^T \text{ est symétrique.}$$

Si $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ alors $\text{Spec}(A^T) = \{\lambda_1^T, \lambda_2^T\}$. Puisque $\lambda_i > 0 \Rightarrow \lambda_i^T > 0$ on a donc que A def positive $\Rightarrow A^T$ def pos.

$$b) s(ABw, w) = ({}^tABw) A^T w = {}^tB {}^tA A^T w = {}^tB A A^T w = {}^tB w$$

$$\forall w, w \in \mathbb{R}^n$$

$$s(w, ABw) = {}^tw A^T A B w = {}^tw B w$$

AB est donc un opérateur auto-adjoint de $(\mathbb{R}^n, s)$

c) AB autoadjoint dans $(\mathbb{R}^n, s) \Rightarrow AB$ diagonalisable pour le thm spectral. Donc si AB est aussi nilpotent on a

$$AB = 0 \quad \text{car la seule matrice diagonalisable et nilpotente à la fois est } 0. \text{ On en déduit que } 0 = A^T(AB) = B.$$

Exercice 3 a) $\chi_A(x) = (x-2)^2(-1-x)^2 = (x+1)^2(x-2)^2$. $V_{-1}(A) = \langle (-7, -3, 0, 3) \rangle$, $V_2(A) = \langle (1, 0, 0, 0) \rangle$.

On a donc que la réduite de Jordan de A est $J_A = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$ car le nombre de blocs de

Jordan de va.p. 2 (resp. -1) coïncide avec la dim de $V_2(A)$ (resp. $V_{-1}(A)$). De conséquence $\mu_A = \chi_A$

car le polynôme minimal de A est le ppcm des polynômes minimaux des blocs de Jordan élémentaires

b) On a $V = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$. Soit f_i la restriction de f à $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})^{n_i}$. Alors $\chi_f = (-1)^n \mu_f \Rightarrow$

$\chi_{f_i} = (-1)^{n_i} \mu_{f_i} \quad \forall i$ car les μ_{f_i} (resp. les χ_{f_i}) sont premiers entre eux. La règle du ppcm (*)

nous donne : J_{f_i} = réduite de Jordan de $f_i = J_{n_i}(\lambda_i)$ = bloc élémentaire de taille n_i et va.p. λ_i

et donc la réduite de Jordan de f est $J_f = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{J_{n_1}(\lambda_1)} & & \\ & \boxed{J_{n_2}(\lambda_2)} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{n_r}(\lambda_r)} \end{array} \right)$

(*) On fixe $a \in \mathbb{F}$. Soit $J = \left(\begin{array}{ccc} \boxed{J_{n_1}(a)} & & \\ & \boxed{J_{n_2}(a)} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_{n_r}(a)} \end{array} \right)$ Alors on a :

$$\mu_{J_{n_i}(a)} = (x-a)^{n_i} = (-1)^{n_i} \chi_{J_{n_i}(a)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mu_J = \text{ppcm}((x-a)^{n_1}, \dots, (x-a)^{n_r}) = \text{ppcm}(\mu_{J_{n_i}(a)} \mid i=1, \dots, r) \\ \chi_J = (x-a)^{n_1} \dots (x-a)^{n_r} = \prod_{i=1}^r \chi_{J_{n_i}(a)} \end{cases}$$

c) On a que $f^{i-1}e_1 = e_i \quad \forall i=2, \dots, n$ et $f^n e_1 = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n$

Donc $p(f)e_1 = 0$ et $p(f)e_i = p(f)f^{i-1}e_1 = f^{i-1}p(f)e_1 = 0$ d'où $p(f) = 0$ et $\mu_f(x) | p(x)$

Puisque $e_1, f e_1, \dots, f^{n-1} e_1$ forment une famille libre, le polynôme minimal de f ne peut pas avoir degré $< n$. Pour Cayley-Hamilton il a donc degré n et $\mu_f(x) = p(x)$. Toujours pour Cayley-Hamilton

$$\mu_f(x) = (-1)^n \chi_f(x).$$

d) Si $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists p(x) \in \mathbb{C}[x]$, alors $\chi_A = \chi_{\alpha_p} = (-1)^n \mu_{\alpha_p} = (-1)^n \mu_A$

Viceversa si $\chi_A = (-1)^n \mu_A$, soit $p(x) = \mu_A(x)$. On sait (voir c) que $\chi_{C(\mu_A)} = (-1)^n \mu_{C(\mu_A)} = (-1)^n \mu_A$

Donc (voir b) A et $C(\mu_A)$ ont la même réduite de Jordan. On en déduit que $A \in \text{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 4 Le polynôme $p(x) = x^5 + x^3 + x - 3$ a 1 comme unique racine positive. En effet 1 est une racine et $p(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 3) = (x-1)q(x)$. Le polynôme $q(x)$ a coefficients positifs donc n'a pas de racines positives.

Si A est symétrique positive le thm spectral nous donne que A est diagonalisable avec va.p. positives

Puisque les va.p. de A doivent être des racines de $p(x)$, A sera diagonalisable avec pour seule va.p. 1

On en déduit que $A = \text{Id}$.