Université de Cergy-Pontoise
Juin 2013

Algèbre linéaire et bilinéaire
Licence de Mathématiques, troisième année, seconde session

Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours 4 points

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Que signifie qu'un endomorphisme f de E est trigonalisable ?
2. Démontrer qu'un endomorphisme de E est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Premier exercice 3 points

Soit a et b deux réels distincts. On considère une matrice A à coefficients réels telle que

$$\chi_A(X) = (X-a)^4(X-b)^2 \qquad \text{et} \qquad \mu_A(X) = (X-a)^2(X-b)$$

1. Quelles sont les réductions de Jordan possibles pour la matrice A ? On donnera toutes les justifications nécessaires.
2. Dans chaque cas, préciser la dimension des sous-espaces propres associés aux valeurs propres a et b.
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Second exercice 7 points

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels. Si X est un élément de E, on notera

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

1. On définit q application de E dans $\mathbb{R}$ par :

   $$q(X) = -4\det(X) + (\operatorname{tr}(X))^2$$

   Vérifier que q est une forme quadratique sur E. On donnera sa matrice par rapport à la base canonique de E : $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$
2. Déterminer le rang et la signature de q.
3. Déterminer le noyau de ϕ, forme bilinéaire symétrique associée à q.
4. En remarquant que $q(X)$ est le discriminant du polynôme caractéristique de X, caractériser le cône isotrope de q.

Troisième exercice 6 points

Soit E un espace vectoriel euclidien. On notera $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs. On se donne deux vecteurs non nul a et b de E et on définit une application f de E dans E par :

$$\forall x \in E,\ f(x) = x + \langle b, x\rangle a$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer les valeurs propres de f, et les sous-espaces propres associés.
3. Rechercher quand f est diagonalisable.
4. Rechercher quand f est autoadjoint.