*Université de Cergy-Pontoise*
Avril 2013

# Algèbre linéaire et bilinéaire

Licence de Mathématiques, troisième année

*Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits*

## Question de cours 4 points

Énoncé et démonstration du lemme des noyaux. On se contentera de la première étape : cas où le polynôme P est produit de deux polynômes $P_1$ et $P_2$ premiers entre eux.

## Premier exercice 3 points

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, puis la réduite de Jordan de A.
2. Montrer que $A = I + B$ où B est définie par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   est la décomposition de Dunford de A, et en déduire l'expression de $A^n$.

## Second exercice 3 points

Soit $q$ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$$

lorsque $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. On note $\phi$ la forme bilinéaire symétrique associée.

1. Déterminer la matrice de $q$ dans la base canonique puis en donner le rang et la signature.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_3 = 0\}$$

   Donner une base de F, déterminer $F^\perp$ et montrer que $F^\perp \subset F$.

## Troisième exercice

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $(a_{ij})$ tels que

$$\begin{cases} a_{j+1,j} = 1 & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ a_{i,j} = 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

1. Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A. Calculer $f^k(e_i)$ pour tout $k$ et tout $i$ de 1 à $n$. En déduire que $f$ est nilpotent d'ordre $n$. Quels sont ses polynômes minimaux et caractéristiques ?
2. Soit $g$ un endomorphisme qui commute avec $f$ (c'est-à-dire tel que $g \circ f = f \circ g$). On note

   $$g(e_1) = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-1} e_n$$

   Montrer que $g$ coïncide avec l'endomorphisme $\mathrm{P}(f)$ où P est le polynôme

   $$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_0 + a_1 \mathrm{X} + a_2 \mathrm{X}^2 + \dots + a_{n-1} \mathrm{X}^{n-1}$$

   En déduire la forme de l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A.
3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$. On pourra commencer par montrer que B est un polynôme en A.

## Quatrième exercice

On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 1$, et on définit sur E une relation binaire par

$$\mathrm{A} \mathscr{R} \mathrm{B} \iff {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = {}^t\mathrm{B}\mathrm{B}$$

1. Vérifier que c'est une relation d'équivalence. Quelle est la classe de I ?
2. On note $\mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales. Montrer que s'il existe $\Omega \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \Omega \mathrm{B}$ alors $\mathrm{A} \mathscr{R} \mathrm{B}$.
3. On suppose que A est inversible et que $\mathrm{A} \mathscr{R} \mathrm{B}$. Montrer qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathbb{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{OB}$.
4. On suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et que $(f_i)_{i=1..n}$ et $(g_i)_{i=1..n}$ sont des vecteurs indépendants de E tels que

   $$\forall (i,j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2,\ \langle f_i, f_j \rangle = \langle g_i, g_j \rangle$$

   Montrer qu'il existe une isométrie transformant, pour tout $i$, $f_i$ en $g_i$.