avril 2012
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Algébre linéaire et bilinéaire

Durée: 3h. Aucun document autorisé.
Une réponse sans aucune justification sera considérée comme fausse.

1. Questions de cours [4]

a) [**2**] Donner l'enoncé du théoreme spectral pour un endomorphisme auto-adjoint d'un espace hermitien.

b) [**2**] Soit V un espace vectoriel de dimension finie et soient $f, g \in \mathcal{L}(V)$ deux endomorphismes de V. Démontrer que si f, g sont diagonalisables et $f \circ g = g \circ f$, alors f et g sont co-diagonalisables, i.e. diagonalisables dans une même base.

2. Petits Exercices [6]

Exercice 1. [**2**] Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 2.
a) [**1**] Soient $A,\ B \in M_4(\mathbb{C})$ deux matrices de taille 4 à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que
$$\chi_A(x) = \chi_B(x) = (x-3)^3(2+x).$$
Démontrer que A est semblable à B si et seulement si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

b) [**1**] Soient $A,\ B \in M_4(\mathbb{C})$ deux matrices de taille 4 à coefficients dans $\mathbb{C}$ telles que
$$\chi_A(x) = \chi_B(x) = (3-x)^4.$$
Est-il vrai que A est semblable à B si et seulement si $\mu_A(x) = \mu_B(x)$?

Exercice 3.
a) [**1**] Démontrer que les matrices $A, B \in \mathbb{S}_3(\mathbb{R}) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$ ne sont pas congruentes dans $M_3(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) [**1**] Les matrices $A, B \in \mathbb{S}_4(\mathbb{C}) = \{A \in M_4(\mathbb{C}) | {}^tA = A\}$ sont elles congruentes dans $M_4(\mathbb{C})$?
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tournez S.V.P.

3. **Exercices [10,5]**

Exercice 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et soit $Spec(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$ le spectre de A.

a) [**1**] Démontrer que la matrice A est nilpotente si et seulement si $Spec(A) = \{0\}$.

b) [**1**] Calculer $Spec(2^k A)$ pour tout $0 \neq k \in \mathbb{N}$.

c) [**1**] Démontrer que si A est semblable à $2A$ alors A est semblable à $2^k A$ pour tout $0 \neq k \in \mathbb{N}$.

d) [**1**] Démontrer que si A est semblable à $2A$ alors A est nilpotente.

e) [**2**] En utilisant le théorème de Jordan, démontrer la reciproque, i.e. démontrer que si A est nilpotente alors A est semblable à $2A$.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathbb{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$ deux matrices symétriques. On suppose en plus que A est définie positive.

a) [**1,5**] Démontrer que A^{-1} est symétrique et définie positive. En déduire que

$$s : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto s(x, y) = {}^t x A^{-1} y$$

est un produit scalaire.

b) [**1**] Démontrer que AB est un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, s)$.

c) [**1**] Démontrer que AB est diagonalisable.

d) [**1**] Démontrer que si B est positive alors $Spec(AB) \subset \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$.