Université de Cergy-Pontoise
Mai 2010
L3-M-MI-MP Algèbre linéaire et bilinéaire

Première session - Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

---

Premier Exercice - Questions de cours - 3 points

1. Donner la définition d'un produit scalaire (dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
2. Énoncer, en précisant les hypothèses, ce qu'est la décomposition de Dunford d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Deuxième Exercice - Exercices de cours - 5 points

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose que le polynôme caractéristique de u est :
$$\chi_u(X) = X^6(X-3)^2$$
On sait de plus qu'un des sous-espaces propres de u est de dimension trois et que l'autre est de dimension un. Déterminer les formes possibles de la réduite de Jordan de u.
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 5. Donner le rang et la signature de la forme quadratique q définie par :
$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 + 4x_4x_5$$
où $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

Premier problème - Sous-espaces stables - 6 points

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F est u-stable si
$$\forall x \in F,\ u(x) \in F$$

1. Montrer que l'intersection et la somme de deux sous-espaces vectoriels u-stables est u-stable. Si G est un sous-espace d'un sous-espace u-stable F, est-il lui-même u-stable ?
2. Montrer que si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Ker}(P(u))$ est un sous-espace u-stable.
3. Dans cette question, on suppose que la matrice de u dans une base $\mathscr{B} = (e_i)$ est un bloc de Jordan de la forme :
$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
On rappelle que la dimension de E est n.
   (a) Donner le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u, sans justification.

(b) On pose $F_k = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{id})^k$, pour $k = 0$ jusqu'à n. Montrer que F_k est un sous-espace u-stable de dimension k. On pourra utiliser le cours ou bien faire un calcul.

(c) Soit F un sous-espace stable de dimension k. On note v la restriction de u à F. Déterminer le polynôme caractéristique de v et en déduire que F coïncide avec F_k (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton). Quel est le nombre des sous-espaces u-stables ?

4. On suppose maintenant que u est diagonalisable, avec n valeur propres distinctes (n est la dimension de E). Montrer que tout sous-espace u-stable est somme de droites propres. Combien y a t-il de sous-espaces u-stables de dimension 2 ?

Second problème - espace vectoriel euclidien - 6 points

Soit E un espace vectoriel euclidien. Si u est un endomorphisme **bijectif** de E, on dit qu'il conserve l'orthogonalité s'il a la propriété :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle u(x), u(y) \rangle = 0$$

1. Montrer qu'une isométrie (ou transformation orthogonale) conserve l'orthogonalité.
2. Dans cette question, on se place en dimension deux et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Montrer que u définie par :
$$M_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
conserve l'orthogonalité.
3. On revient au cas où E est de dimension finie n. Montrer que si u conserve l'orthogonalité, alors il transforme une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ en une base orthogonale dont tous les vecteurs ont même norme. Indication : on vérifiera et on utilisera que $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux.
4. Réciproquement, montrer que si u transforme une base orthonormée en une base orthogonale dont tous les vecteurs ont la même norme, alors u conserve l'orthogonalité.