Université de Cergy-Pontoise
Mai 2010
L3-M-MI-MP Algèbre linéaire et bilinéaire

Première session - Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

---

Premier Exercice - Questions de cours - 3 points

1. Un produit scalaire de E est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E. On peut également le définir par une forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive.
2. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé. Alors il existe un couple unique d'endomorphismes d et n tels que :

$$\begin{cases} u = d + n \\ d \text{ est diagonalisable} \\ n \text{ est nilpotent} \\ d \circ n = n \circ d \end{cases}$$

Deuxième Exercice - Exercices de cours - 5 points

1. Le SEC associé à la valeur propre 0 est de dimension 6, celui associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Comme le SEP est inclus dans le SEC, le SEP de dimension 3 est celui associé à la valeur propre 0. Il y a donc trois blocs de Jordan pour cette valeur propre et 6 = 1+1+4 = 1+2+3 = 2+2+2 sont les seules décomposition possibles. Par contre, il y a un seul bloc pour la valeur propre 2. Les trois réduites de Jordan possibles sont donc obtenues en réunissant l'un des trois blocs :

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{|cccc|}\hline 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\\hline\end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{|cc|}\hline 0&1\\0&0\\\hline\end{array} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{|ccc|}\hline 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\\hline\end{array} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|}\hline 0&1\\0&0\\\hline\end{array} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{|cc|}\hline 0&1\\0&0\\\hline\end{array} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{array}{|cc|}\hline 0&1\\0&0\\\hline\end{array} \end{pmatrix}$$

avec le bloc $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. La première étape de la méthode de Gauss donne :

$$q(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + 4x_4x_5$$

et donc

$$q(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + (x_4 + x_5)^2 - (x_4 - x_5)^2$$

La signature est $(2, 1)$, et donc le rang est 3

Premier problème - Sous-espaces stables - 7 points

1. Si $x \in F \cap G$, où F et G sont u-stables, alors

$$u(x) \in u(F) \subset F \text{ et } u(x) \in u(G) \subset G$$

donc $u(x) \in F \cap G$, l'intersection est u-stable. De même, si $x \in F+G$, où F et G sont u-stables, alors

$$x = f + g \text{ où } f \in F, g \in G, \text{ et } u(x) = u(f) + u(g) \in u(F) + u(G) \subset F + G$$

donc la somme est u-stable.

Non : E est toujours u-stable, et on peut trouver des u pour lesquels il existe des sev non u-stables.

2. Soit $u \in \mathrm{Ker}(P(u)$ donc $P(u)(x) = 0$. De plus,

$$P(u)(u(x)) = (P(u) \circ u)(x) = (u \circ P(u))(x) = u(P(u)(x)) = u(0) = 0$$

ce qui montre que $u(x) \in \mathrm{Ker}(P(u)$.

3. (a)

$$\chi_u(X) = (-1)^n (X-2)^n, \qquad \mu_u(X) = (X-2)^n$$

(b) F_k est u-stable car c'est le noyau d'un polynôme en u. Le cours nous assure que la suite des noyaux itérés est strictement croissante de F_0 à F_n, puisque n est l'exposant dans le polynôme minimal. Comme il y a $n+1$ noyaux itérés, la suite de leur dimensions ne peut être que 0, 1, …, n.

(c) Si F un sous-espace stable de dimension k, la restriction v de u est bien définie. On sait (par exemple avec des matrices blocs), que le polynôme caractéristique de cette restriction est un diviseur de χ_u, de degré k : c'est dont

$$\chi_v(X) = (-1)^k (X-2)^k.$$

Mais alors, par le théorème de Cayley-Hamilton, tous les vecteurs de F vérifient :

$$(u - 2\mathrm{id})^k(x) = 0$$

et sont donc tous dans F_k. Donc $F \subset F_k$, comme ils ont même dimension, c'est terminé. Il y a donc $n+1$ sous-espaces u-stables.

4. L'hypothèse implique que u a une base $\mathscr{B} = (e_i)$ de n vecteurs propres associés à toutes les valeurs propres distinctes. Soit F un sous-espace stable. Le polynôme caractéristique de la restriction de u à F est un diviseur du polynôme caractéristique de u : les valeurs propres de cette restriction sont donc simples, et il existe une base de vecteurs propres extraite de la base $\mathscr{B}$. Ainsi, les sous-espaces stables de dimension deux sont de la forme $\mathrm{vect}(e_i, e_j)$ pour $i \neq j$. Il y en a $\frac{n(n-1)}{2}$.

Second problème - espace vectoriel euclidien - 5 points

1. C'est la conséquence de ce qu'une isométrie conserve le produit scalaire.
2. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ alors :

$$\langle u(x), u(y) \rangle = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 - 2x_2) \begin{pmatrix} 2y_1 + 3y_2 \\ 3y_1 - 2y_2 \end{pmatrix} = 13(x_1 y_1 + x_2 y_2) = 13 \langle x, y \rangle$$

La nullité de $\langle x, y \rangle$ implique celle de $\langle u(x), u(y) \rangle$.

3. On revient au cas où E est de dimension finie n. L'hypothèse de bijectivité fait que l'image d'une base (e_i) sera une base $(u(e_i))$. De plus, les vecteurs (e_i) étant orthogonaux deux à deux, leurs images seront orthogonales deux à deux. Enfin,

$$\langle e_i + e_j, e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$$

donc $u(e_i + e_j)$ et $u(e_i - e_j)$ sont orthogonaux et

$$0 = \langle u(e_i) + u(e_j), u(e_i) - u(e_j) \rangle = \|u(e_i)\|^2 - \|u_(e_j)\|^2$$

prouve que les vecteurs ont même norme.

4. L'hypothèse prouve que u coïncide alors avec une homothétie précédée d'une isométrie. On peut aussi faire un calcul.