Partiel de L3, Algèbre Linéaire (Fev. 2009)

Qu1. Soit $f \in \mathrm{End}_K(V)$ un endomorphisme de V et $P(X) \in K[X]$ un polynôme. Montrer que $\ker P(f)$ est f-stable ?

Qu2. Soit $A \in M_n(K)$ une matrice.

(a) Donner l'énoncé de la décomposition de Dunford pour A.

(b) Quand est-ce que la décomposition de Dunford existe.

(c) Déterminer la décomposition lorsque A est le bloc Jordan (avec justification)

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & . & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ex1. Soit M une matrice de $M_9(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est $(x^2-1)^3(x-2)^3$ et le polynôme minimal est $(x^2-1)^2(x+2)$

(a) Déterminer $\mathrm{trace}(M)$ et $\mathrm{dét}(M)$.

(b) Expliciter toutes les formes de Jordan possibles de la matrice M (à permutation près).

Ex2. Soient $f \in \mathrm{End}_K(V)$ et W un sous-espace vectoriel de V stable par f. Notons g l'endomorphisme de W qui est la restriction de f à W.

(a) Montrer que si $P(X) \in K[X]$ vérifie $P(f) = 0$, alors $P(g) = 0$. (*indication : considérer $P(g)(w)$ pour $w \in W$*)

(b) En déduire que si f est diagonalisable, alors g est diagonalisable.

(c) Montrer alors que si f est diagonalisable, tout sous-espace f-stable est engendré par des vecteurs propres de f.

(d) Application : Montrer que A est diagonalisable et trouver quatre sous-espaces distincts de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 et stables par A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ex3.

(a) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. montrer que f est nilpotent si et seulement si sa trace et son déterminant sont nuls.

(b) On considère quatre réels a, b, c et d et les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels a, b, c et d pour que N soit nilpotent et $P + N$ ne le soit pas.

(c) Est-ce que l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel ?