Large Examen d'Algèbre Linéaire
28 Avril-2009

Qu1. Soit V un K-espace vectoriel et $f \in End(V)$.

1. Donner l'énoncé du lemme des noyaux.
2. Si $\xi_f(X) = (X-1)^2(X+1)^2$, donner la définition des sous-espaces caractéristique de f et justifier que V est somme directe des sous-espaces caractéristiques.

Qu2. Vrai ou Faux. Les questions concernent des matrices de $M_n(\mathbb{C})$. Si vrai donner une démonstration et si faux un contre-exemple.

1. Des matrices avec le même polynôme minimal sont semblables.
2. Si le polynôme caractéristique de A a n racines simples, alors A est diagonalisable.
3. Si A est une matrice symétrique réelle telle que $A^n = 0$, alors A est la matrice zero.

Ex1. On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la forme de Jordan et une base de Jordan de la matrice A.
2. Montrer que A et B sont semblables.

Ex2. Déterminer toutes les formes de Jordan possibles pour une matrice $M \in M_8(\mathbb{C})$ telle que $\mu_M(X) = X^2(X-1)^2(X+1)^2$.

Ex3. On considère la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ et la forme bilinéaire symétrique $b(x,y) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suivante

$$b(x,y) = x_1y_1 + \beta x_1y_2 + \beta x_2y_1 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta)x_2y_2 + \frac{\alpha-\beta}{2}x_3y_4 + \frac{\alpha-\beta}{2}x_4y_3$$

où α, β sont des réels, $x = \sum_{i=1}^4 x_ie_i$ et $y = \sum_{i=1}^4 y_ie_i$.

1. Ecrire la forme quadratique associée q et la matrice de la form q..
2. Déterminer, en fonction de α et β le rang, la signature et le noyau de q.

Problème : Soit $(V, \langle , \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace euclidien.

1.1 Donner la définition d'un endomorphisme orthogonal (ou une isométrie) de V et montrer que les seules valeurs propres possibles réelles sont 1 ou -1.

Notons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 Montrer que g est orthogonale.

1.3 Montrer qu'elle admet qu'une seule valeur propre réelle, qu'on notera μ.

1.4 Trouver une base orthonormale (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 soit vecteur propre de g de valeur propre μ.

1.5 Ecrire la matrice de g dans cette base.

Soit maintenant f l'endomorphisme de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.1 Montrer que f est orthogonale.

2.2 Montrer que f admet une seule valeur propre réelle que vous préciserez. On note cette valeur propre λ.

2.3 Trouver une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que v_1 soit vecteur propre de f de valeur propre λ.

2.4 Déterminer la matrice de f dans cette base.

2.5 En déduire qu'il existe un endomorphisme symétrique σ tels que $g = f \circ \sigma = \sigma \circ f$.