Examen de L3, Algèbre Linéaire

2ème session (Juin 2008)

Qu Soit $(V, <, >)$ un espace vecotriel hermitien

1. Donner la définition d'un endomorphisme normal de V.
2. Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ normal. Montrer que $f(v) = \lambda v$ si et seulement si $f^*(v) = \overline{\lambda} v$

Ex1 Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique suivante

$$q(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz - 2yz$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, sa signature, son rang et son noyau.
2. Est-ce que le cône isotrope de q est un sous-espace vecotriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier.
3. Soit $W = \mathrm{Vect}(2, 1, -3)$. Déterminer $W^\perp$. Est-ce que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$? Pourquoi?

Ex2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Décrire la forme de Jordan de A et trouver une base de Jordan pour A.
2. Est-ce que A est semblable à B ? Est-ce que A^2 est semblable à B ? (justifier vos réponses)

Ex3 Vrai ou faux. Si vrai donner une démonstration et si faux un contre-exemple.

1. Si le polynôme caractéristique d'une matrice est $(X - 4)^3(X - 2)^2$ et le sous-espace propre de valeur propre 4 est de dimension 3, alors la matrice est diagonalisable.
2. Si le polynôme caractéristique d'une matrice est $(X - 4)^3(X - 1)(X - 2)$ et le sous-espace propre de valeur propre 4 est de dimension 3, alors la matrice est diagonalisable.
3. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(V, <, >)$, alors $V = \mathrm{Im} f \oplus \ker f$.
4. Une matrice réelle diagonalisable est symétrique.

Ex4 Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, et $f \in \mathrm{End}_K(V)$ un endomorphisme *non-nul* de V. On suppose que $\mathrm{Im} f = \ker f$.

1. Montrer que le polynôme minimal de f est X^2.
2. Soient W un supplementaire de $\ker f$ (c-à-d $V = W \oplus \ker f$) et $(v_1, \ldots, v_k)$ une base de W. Montrer que $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ est libre et en déduire que $\dim V$ est paire.