L3 - Examen d'Algèbre - Mai 2008

Qu1 Soit $(V, <,>)$ un espace vectoriel hermitien.

a) Donner la définition d'un endomorphisme auto-adjoint de V.

b) Suppsons $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ auto-adjoint. Montrer que les valeurs propres de f sont réelles.

Ex1. Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le rang, la signature et le noyau de q.

b) Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$

c) Déterminer le cône isotrope de q. Est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

d) Construire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs isotropes.

e) Soit $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \mathrm{vect}(v)$. Déterminer $V^\perp$ et $V^{\perp\perp}$.

f) Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\phi : E \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $\phi(P) = P(0)P(1)$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base canonique de E et déduire de ce qu'il précède le noyau de ϕ.

Ex2. Notons A et $B \in M_5(\mathbb{C})$ deux matrices complexes. Supposons que A et B aient les mêmes vecteurs propres ; que le polynôme minimal de A soit $(X+1)^2$; et que B soit nilpotente.

a) Donner les polynômes caractéristiques de A et de B.

b) Déterminer toutes les formes de Jordan possibles de A dans chaque cas donner la dimension des sous-espaces propres de A. (expliquer vos réponses)

c) Utilisant la dimension des sous-espaces propres de A et B, déterminer toutes les formes de Jordan possibles de B et en déduire que X^3 est un polynôme annulateur de B.

Ex3. Vrai ou faux. Si vrai donner une démonstration et si faux un contre-exemple.

a) Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme diagonalisable a des racines simples.

b) Les valeurs propres réelles d'un endomorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien sont ± 1.

c) Si A est une matrice à coefficients complexes tel que $A^3 = I$, alors A est diagonalisable.(*indication : donner un polynôme annulateur de A*)

Ex4. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel V. On dit que f est semi-simple si pour tout sous-espace vectoriel f-stable W de V, il existe un sous-espace vectoriel f-stable W' tel que $V = W \oplus W'$.

a) Supposons $(V, <,>)$ euclidien et f auto-adjoint. Montrer que $V = W \oplus W^{\perp}$ et en déduire que f est semi-simple. (justifier chaque étape de la démonstration)

b) (bonus) Montrer que l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$, dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas semi-simple. (*indication : considérer* $W = vect(e_1)$).