L3 – Partiel d'Algèbre – Fevrier 2007

Question 1 Soient f un endomorphisme d'un K-espace vectoriel V et W un sous-espace vectoriel f-stable de V. Notons $f' \in End_K(W)$ l'endomorphisme f restreint à W.

(a) Montrer que $\chi_{f'}(X)$ divise $\chi_f(X)$.

(b) Montrer que $\mu_{f'}(X)$ divise $\mu_f(X)$. En déduire que si f est diagonalisable alors f' est diagonalisable.

Question 2 Soient f et g deux formes linéaires sur un K-espace vectoriel V. Montrer que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ si et seulement si f et g sont colinéaires.

Exercice 1 On considère l'applicaton linéaire

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ f & \mapsto & 2f - Xf' + (X^2+1)f'' - \frac{2}{3}f''' \end{array}$$

(a) Choisir une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer la matrice de T dans cette base. En déduire les polynôme caractéristique et minimal de T.

(b) Déterminer la forme de Jordan de T et donner une base de Jordan (en terme des polynômes).

(c) Déterminer tous les sous-espaces T-stables. (*indication : utiliser un argument sur dimension et Question 1*)

Exercice 2 on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Supposons $A \in M_5(\mathbb{R})$. Est-ce que A est trigonalisable ? Est-ce qu'elle est diagonalisable ? pourquoi ? Si oui donner une base de Jordan.

(b) Les mêmes questions si on suppose $A \in M_5(\mathbb{C})$.

(c) Les mêmes questions si on suppose $A \in M_5(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$.

Exercice 3

(a) Soient A et B deux matrices complexes de $M_3(\mathbb{C})$ telles que $A^2 = B^3 = 0$ et $\mathrm{rang} A = \mathrm{rang} B$. Montrer que A et B sont semblables.

(b) Donner un example pour montrer que (a) est faux si A et B appartiennent à $M_4(\mathbb{C})$.