L3 – Examen d'Algèbre – Juin 2007

Qu 1. Enoncer le théorème de Cayley-Hamilton. Le démontrer dans le cas particulier où le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

Ex 1. On considère la suivante forme quadratique réelle sur $\mathbb{R}^3$:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + xy + xz$$

1. Déterminer la signature, le rang et le noyau de q
2. Déterminer une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer le cône isotrope de q. Est-ce qu'il est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Pourquoi ?
4. Soit $F := \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$.

Ex 2. On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix}.$$

où a est une variable.
1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $a = 2$.
3. (a) Donner la définition de la décomposition de Dunford d'une matrice M.
   (b) Soit $a = 1$. Montrer que la décomposition de Dunford de A est $A = 2I + N$ avec N nilpotent. Déterminer A^n.

Ex 3. Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme de E.
1. Donner la définition d'un endomorphisme auto-adjoint de E et énoncer le théorème principal sur les endomorphismes auto-adjoints des espaces euclidiens.
2. Montrer que si f est auto-adjoint et que $\langle x, f(x)\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, alors $f = 0$.